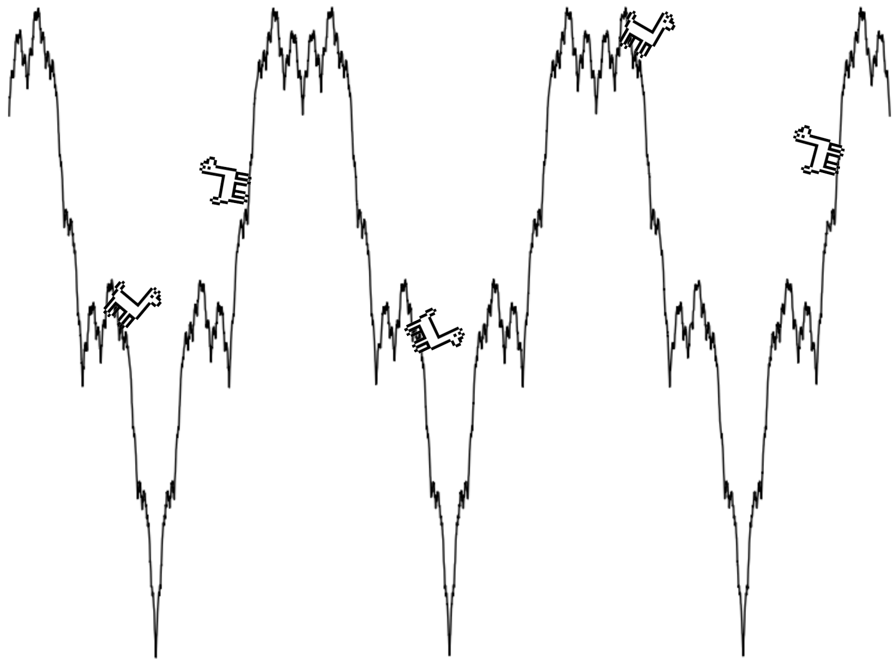
Análisis



Sebastián Barbieri
María Isabel Cortéz

Índice general

Éste apunte de análisis es el resultado de la combinación de las notas de ambos autores que dictaron el curso Análisis-I de la Universidad de Santiago de Chile de manera online durante el primer semestre de 2020 al inicio de la pandemia de COVID-19.

El enfoque del curso es introductorio y enfocado en espacios métricos. Si bien se habla de topología y de tópicos más avanzados, se busca en primera instancia dar bases conceptuales e intuitivas fuertes de las nociones más usadas en topología por medio de ejemplos, en vez de buscar la generalidad.

El primer capítulo del curso introduce la noción de métrica y los conceptos básicos de topología, tales como conjuntos abiertos, cerrados, compactos, densos, etc. En ésta unidad se privilegia la noción de espacio métrico como objeto per se, y las diferentes topologías que se obtienen al variar la métrica.

El segundo capítulo estudia las relaciones entre espacios métricos mediante la noción de función continua. En este capítulo se introducen la nociones de homeomorfismo e isometría, y se estudian tópicos más avanzados, tales como teoremas de extensión o la completación de un espacio métrico.

El tercer capítulo se centra en estudiar espacios de funciones mediante la noción de convergencia uniforme. Se da un cuadro teórico que permite modelar ésta convergencia con una métrica y se estudian los teoremas clásicos del análsis real, tales como el teorema de Stone-Weierstrass y el teorema de Arzelà-Ascoli.

El cuarto capítulo pretende dar una introducción al análisis funcional y explorar tópicos avanzados de análisis real. Se introduce la noción de espacio de Banach y se caracteriza la completitud mediante la convergencia de series. También se estudia la noción de dual de un espacio de Banach y teoremas clásicos, tales como el teorema de Banach-Steinhaus.

Capítulo 1

Preliminares

En este apunte estudiaremos la idea de espacio métrico. El objetivo será equipar un conjunto de una función que describe la "distancia" entre cada par de puntos. Esta noción será fundamental para generalizar las nociones de convergencia, continuidad, etc a conjuntos más generales que $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^n$.

Denotaremos por $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales comenzando en 0.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, \}.$$

También utilizaremos la notación $\mathbb{R}_{\geq 0}$ y $\mathbb{R}_{>0}$ para denotar los números reales positivos y estrictamente positivos respectivamente.

$$\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\},$$

$$\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}.$$

Es usual también en la literatura utilizar la notación $\mathbb{R}^+$ o $\mathbb{R}_+$ para denotar alguno de los conjuntos $\mathbb{R}_{\geq 0}$ o $\mathbb{R}_{>0}$. En nuestro caso preferiremos la notación anterior para no tener ambiguedad sobre si incluímos al 0 o no.

Definición 1.0.1: Valor absoluto

El **módulo** o **valor absoluto** de un real $x \in \mathbb{R}$ se define como:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Notemos que el módulo induce una noción de distancia, llamada **distancia euclidiana**, en los números reales mediante la función $d\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por

$$d(x, y) = |x - y|, \text{ para todo } x \text{ e } y \text{ en } \mathbb{R}.$$

Notemos que esta distancia satisface las tres propiedades siguientes:

- $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.
- $d(x, y) = d(y, x)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$.

En éste curso estudiaremos generalizaciones de la distancia euclidiana mediante funciones que satisfagan las tres propiedades anteriores. El objetivo de ésto será generalizar nociones como continuidad, sucesiones, convergencia y límites a espacios más generales. En lo que sigue recordaremos algunas de estas nociones en el caso de los números reales con la distancia euclidiana.

1.1. Nociones de convergencia en $\mathbb{R}$

Definición 1.1.1: Sucesión real

Una sucesión real es una función $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Dado $n \in \mathbb{N}$ y una sucesión $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, usualmente denotaremos el valor $a(n)$ por a_n y a la sucesión la denotaremos por $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si bien el significado no cambia, la última notación resalta que queremos pensar en a no como una función, sino como una secuencia numerable de reales indexada por los números naturales.

Ejemplo 1.1.2

- $(a_n)_{n\geq 0}$ con $a_n = \frac{1}{2^n}$, corresponde a la función $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que a $n \in \mathbb{N}$ le asigna $a(n) = \frac{1}{2^n}$. Podemos ilustrarla como la secuencia de valores
$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \dots\right).$$
- $(b_n)_{n\geq 0}$ con $b_n = (-1)^n$, corresponde a la función $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que a $n \in \mathbb{N}$ le asigna $b(n) = (-1)^n$. Podemos ilustrarla como la secuencia de valores
$$(1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots).$$

También en muchos casos puede ser útil indexar una sucesión por un subconjunto infinito de los números naturales. En general, si $S \subset \mathbb{N}$ es infinito, llamaremos también sucesión a una función $b\colon S \to \mathbb{N}$. Notemos que en este caso la función b puede reindexarse como una sucesión indexada por los naturales $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ de la forma siguiente:
$$a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \text{ donde } a(n) = b(\text{mín}\{m \in S : |\{k \in S : k < m\}| = n\}).$$

Ejemplo 1.1.3

Considere la secuencia real $(b_n)_{n\geq 2}$ dada por
$$b_n = \frac{1}{n(n-1)}.$$
En este caso $S = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 2\}$. Vemos que es conveniente definir la secuencia comenzando desde $n = 2$, ya que la fórmula dada no está definida para $n = 1$ o $n = 0$. Si deseamos reindexarla nos quedaría la secuencia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por
$$a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Definición 1.1.4: Convergencia de una sucesión real

Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es **convergente** si existe $L \in \mathbb{R}$ tal que para todo real $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ se tiene que
$$|a_n - L| \leq \varepsilon.$$

Al valor L se le denomina el **límite** de la sucesión.

Intuitivamente, una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un límite L si para toda tolerancia $\varepsilon > 0$ existe un instante $N \in \mathbb{N}$ tal que todos los elementos de la subsucesión $(a_n)_{n\geq\mathbb{N}}$ están contenidos en el intervalo $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. Si no existe un L que satisfaga lo anterior, se dirá que la sucesión **no converge**.

Ejemplo 1.1.5

- La sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ con $a_n = \frac{1}{2^n}$ converge y su límite es 0.
- La sucesión $(b_n)_{n\geq 0}$ con $b_n = (-1)^n$ no converge.

Ejercicio 1.1.6

Muestre que si una sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ converge, entonces su límite es único.

Más adelante mostraremos que es posible definir una noción de límite en espacios métricos generales, y todo lo anterior, incluida la propiedad de unicidad del límite, seguirá siendo válido.

Definición 1.1.7: Cotas superiores e inferiores

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto. Decimos que

- a es una **cota inferior** de A si para todo $x \in A$ se tiene que $a \leq x$.
- b es una **cota superior** de A si para todo $x \in A$ se tiene que $x \leq b$.

Una propiedad de los números reales que si $A \subseteq \mathbb{R}$ posee una cota superior, entonces existe un único número real $b \in \mathbb{R}$ que a la vez es cota superior de A y tal que si t es también cota superior de A, entonces $b \leq t$. A este número se le denomina el **supremo** de A y se denota por $\sup(A)$. Del mismo modo, si $A \subseteq \mathbb{R}$ posee una cota inferior, entonces existe un único número real $a \in \mathbb{R}$ que a la vez es cota inferior de A y tal que si t es también cota inferior de A, entonces $t \leq a$. A este número se le denomina el **ínfimo** de A y se denota por $\inf(A)$.

Observación 1.1. Si A no posee cota superior, escribimos $\sup(A) = +\infty$. Si A no posee cota inferior, escribimos $\inf(A) = -\infty$.

Ejercicio 1.1.8

Calcule el supremo e ínfimo de los siguientes conjuntos.

- $[0, 1)$.
- $\mathbb{Q}$
- $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$.
- $\{x \in \mathbb{R} : x = \sqrt{n} \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$.

Ejercicio 1.1.9

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\sup(A) \in \mathbb{R}$. Muestre que $t = \sup(A)$ si y solamente si t es cota superior de A y para todo real $\varepsilon > 0$ existe $x \in A$ tal que $t - \varepsilon < x$.

Dada una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definimos su ínfimo y supremo de la manera siguiente:

$$\sup((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup(\{a_n : n \in \mathbb{N}\}) \quad \operatorname{ínf}((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \operatorname{ínf}(\{a_n : n \in \mathbb{N}\}).$$

Ejercicio 1.1.10

Determine el ínfimo y supremo de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $a_n = -\frac{1}{n}$.

Definición 1.1.11: Límite inferior y superior

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real.

- El **límite superior** de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es el número dado por

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \operatorname{ínf}(\{\sup((a_n)_{n\geq k}) : k \in \mathbb{N}\}),$$

si $\sup((a_n)_{n\geq k})$ es finito para algún $k \in \mathbb{N}$ y $+\infty$ si $\sup((a_n)_{n\geq k}) = +\infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

- El **límite inferior** de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es el número dado por

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup(\{\operatorname{ínf}((a_n)_{n\geq k}) : m \in \mathbb{N}\}),$$

si $\sup((a_n)_{n\geq k})$ es finito para algún $k \in \mathbb{N}$ y $-\infty$ si $\sup((a_n)_{n\geq k}) = -\infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Intuitivamente, una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puede interpretarse también como un conjunto de valores $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, y por lo tanto su supremo e ínfimo están bien definidos. El límite superior corresponde al valor supremo asintótico que se obtiene al descartar cualquier cantidad finita de términos de la secuencia. Análogamente, el límite inferior corresponde al ínfimo asintótico que se obtiene del mismo modo.

Ejercicio 1.1.12

Determine los límites superior e inferior de las secuencias siguientes

- $(a_n)_{n\geq 0}$ dada por $a_n = (-1)^n$.
- $(b_n)_{n\geq 0}$ dada por

$$b_n = \begin{cases} (-1)^n + \frac{50}{n+1} & \text{si } n \neq 721, \\ 346732648236487 & \text{si } n = 721. \end{cases}$$

Definición 1.1.13: Punto de acumulación

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real. Decimos que $x \in \mathbb{R}$ es **punto de acumulación** de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si para todo real $\varepsilon > 0$ y todo $N \in \mathbb{N}$ existe $m \geq N$ tal que $|a_m - x| \leq \varepsilon$.

A diferencia de la noción de límite, acá no pedimos que todo elemento de la secuencia eventualmente esté cerca del punto de acumulación x. Tan solo pedimos que para toda tolencia $\varepsilon > 0$ exista un elemento de la secuencia indexado por un natural arbitrariamente grande que se encuentra a distancia ε de x.

Ejercicio 1.1.14

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real y x un punto de acumulación de ella. Muestre que

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq x \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Muestre además que si $\limsup_{n\to\infty} a_n$ y $\liminf_{n\to\infty} a_n$ son finitos, entonces son puntos de acumulación de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Concluya que si $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$ entonces la sucesión converge.

Una consecuencia del ejercicio anterior, es que una nueva interpretación de los límites superior e inferior es como los supremos e ínfimos de los puntos de acumulación de una secuencia. Más adelante en el curso probarmeos que toda secuencia acotada admite un punto de acumulación.

1.2. Cardinalidad

[EN CONSTRUCCIÓN]

Definición 1.2.1: Conjunto numerable

Un conjunto A se dice **numerable** si existe una biyección $f\colon \mathbb{N} \to A$. Un conjunto se dice **contable** si es finito o numerable.

Teorema 1.2.2: Teorema de Bernstein Cantor Schröder

Sean A, B conjuntos tales que existen funciones inyectivas $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to A$. Entonces existe una biyección $h\colon A \to B$.

Demostración. Sea $C_0 = A \setminus g(B)$. Inductivamente para $k \geq 1$ definimos $C_k = g(f(C_{k-1}))$. Finalmente defina $C = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k$. Considere la función $h\colon A \to B$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in C, \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \in A \setminus C. \end{cases}$$

Notemos que h está bien definida. En efecto, si $x \in A\setminus C$ en particular tenemos que $x \in A\setminus C_0 = g(B)$, luego x tiene preimagen por g, la cual es única ya que g es inyectiva.

Ahora probaremos que h es inyectiva. Supongamos existen $x, y \in A$ tales que $h(x) = h(y)$. Hay tres casos que considerar:

1. Si tenemos que $x, y \in C$, entonces $h(x) = f(x)$ y $h(y) = f(y)$. Como f es inyectiva deducimos que $x = y$.

2. Si tenemos que tanto $x, y \in A \setminus C$, entonces $h(x) = g^{-1}(x)$ y $h(y) = g^{-1}(y)$. De acá obtenemos que $x = g(h(x)) = g(h(y)) = y$.
3. En el último caso consideremos sin pérdida de generarlidad que $x \in C$ e $y \in A \setminus C$ (si fuese al revés basta intercambiar x con y). Tenemos entonces que $f(x) = h(x) = h(y) = g^{-1}(y)$. De acá obtenemos que $y = g(f(x))$. Como $x \in C$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in C_k$, y luego $g(f(x)) \in C_{k+1}$, por lo tanto obtenemos que $y \in C$ lo cual es una contradicción al hecho de que $y \in A \setminus C$.

Finalmente, mostremos que h es sobreyectiva. Sea $y \in B$. Hay dos casos que considerar:

1. Si $y \in f(C)$, basta considerar $x \in C$ y luego tenemos $h(x) = f(x) = y$.
2. Si $y \in B \setminus f(C)$ consideramos $x = g(y)$. Probaremos que $x \in A \setminus C$ de manera inductiva. En efecto, si $x \in C_0 = A \setminus g(B)$ tenemos que no es imagen de un elemento de B y luego no podríamos tener que $x = g(y)$. Sea ahora $k > 0$ y supongamos que $x \notin C_{k-1}$. Si $x \in C_k = g(f(C_{k-1}))$ entonces tendríamos que $y \in f(C_{k-1})$, lo cual no puede ser ya que $y \in B \setminus f(C)$.

   De lo anterior, obtenemos que $x \notin C_k$ para todo $k \geq 0$ y por lo tanto $x \notin C$, de lo cual obtenemos que $x \in A \setminus C$ y luego $h(x) = g^{-1}(x) = g^{-1}(g(y)) = y$.

De todo lo anterior, concluímos que h es biyectiva. $\square$

Capítulo 2

Espacios métricos

En este capítulo estudiaremos la idea de espacio métrico, que abstrae la noción de distancia Euclidiana a una función abstracta que describe la "distancia" entre cada par de puntos de un conjunto general.

2.1. Métricas, ultramétricas y normas

La noción de métrica o distancia formaliza la idea de distancia entre dos puntos.

Definición 2.1.1: Métrica

Sea X un conjunto. Una **métrica** en X es una función $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que satisface las tres propiedades siguientes:

- d es **simétrica**, es decir $d(x,y) = d(y,x)$ para todo $x, y \in X$.
- d es **positiva**, es decir $d(x,y) > 0$ para todo $x \neq y$ en X, y $d(x,x) = 0$ para todo $x \in X$.
- d satisface la **desigualdad triangular**, es decir

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \text{ para todo } x, y, z \in X.$$

Al valor $d(x,y)$ se le denomina la **distancia** entre x e y.

Observación 2.1. Una función $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ simétrica, que satisface la desigualdad triangular y tal que $d(x,x) = 0$ para todo $x \in X$ se le denomina **seudométrica**. la diferencia fundamental es que en una seudométrica puede pasar que $d(x,y) = 0$ pero $x \neq y$ en tanto que una métrica asigna un valor estrictamente positivo a todo par distinto de puntos.

Ejemplo 2.1.2

Sea $d\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definida por

$$d(x,y) = |x - y| \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

Entonces d es una métrica. Esta métrica se conoce como la **métrica Euclidiana** o **métrica natural** de $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.1.3

Sean $n \geq 1$ un entero y $X = \mathbb{R}^n$. Las siguientes son métricas en X:

- La **métrica Euclidiana** $d_2 \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definida por
$$d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$
para todo $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ en $\mathbb{R}^n$.
- La **métrica del taxista** o **métrica Manhattan** $d_1 \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definida por
$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |(x_i - y_i)|,$$
para todo $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ en $\mathbb{R}^n$.
- La **métrica máxima** o **métrica del tablero de ajedrez** $d_\infty \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definida por
$$d_\infty(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|(x_i - y_i)|\},$$
para todo $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ en $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 2.1.4

Muestre que las funciones de los Ejemplos 2.1.2 and 2.1.3 son efectivamente métricas.

Observación 2.2. Las métricas d_1, d_2 y d_∞ coinciden en el caso que $n = 1$.

Ejemplo 2.1.5: Métrica discreta

Sea X un conjunto cualquiera. Se define $d \colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ por
$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$
Esta función es una métrica y se conoce como **métrica discreta**.

La métrica discreta satisface un caso especial de la desigualdad triangular. Notemos que si $d \colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ es la métrica discreta, entonces para todo $x, y, z \in X$ tenemos que
$$d(x,y) \leq \max(d(x,z), d(z,y)) \leq d(x,z) + d(z,y).$$
A las métricas que satisfacen $d(x,y) \leq \max(d(x,z), d(z,y))$ para todo $x, y, z \in X$ se les denomina **ultramétricas**.

Ejercicio 2.1.6

Muestre que si d es una ultramétrica en un espacio X, entonces para todo x, y, z se cumple que al menos dos de los valores $d(x,y), d(x,z), d(y,z)$ coinciden. En otras palabras, todo triángulo es isóceles o equilátero.

Ejercicio 2.1.7

Considere el conjunto $X = \{A : A \subseteq \mathbb{N}\}$ de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$. Definimos $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ por

$$d(A,B) = \begin{cases} 2^{-\inf\{n\in\mathbb{N}\,:\,n\in A\Delta B\}} & \text{si } A \neq B, \\ 0 & \text{si } A = B. \end{cases}$$

Donde $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ es la diferencia simétrica entre A y B. Muestre que la función d define una ultramétrica en X.

Definición 2.1.8: métrica inducida

Sea d una métrica en un conjunto X y sea $A \subseteq X$. La **métrica inducida** por d en A es la restricción de d al conjunto $A \times A$.

Definición 2.1.9: Espacio métrico

Un **espacio métrico** es un conjunto X equipado con una métrica d. Usualmente, un espacio métrico se denota como un par ordenado (X, d).

Ejemplo 2.1.10

$(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{R}^n, d_1)$, $(\mathbb{R}^n, d_2)$, $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ son espacios métricos.

Es importante notar que si d y $\bar{d}$ son dos métricas distintas en un espacio X, entonces (X, d) y $(X, \bar{d})$ son espacios métricos distintos. Por ejemplo, los reales con la métrica Euclidiana y con la métrica discreta no son el mismo espacio métrico, aunque en ambos casos el conjunto sea $\mathbb{R}$.

En lo que sigue veremos un tipo especial de funciones para espacios vectoriales que generan métricas. La definición de espacio vectorial puede encontrarse en el Capítulo 5, Definición 5.1.1.

Definición 2.1.11: Norma

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Una **norma** sobre E es una función $\|\cdot\|\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que satisface las siguientes propiedades:

1. $\|x\| > 0$, para todo $x \in E \setminus \{0\}$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x \in E$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in E$.

Al espacio vectorial E equipado con la norma $\|\cdot\|$ se le llama **espacio vectorial normado**, y usualmente se anota como $(E, \|\cdot\|)$.

Proposición 2.1.12

Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. La función $d\colon E \times E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definida por $d(x, y) = \|x - y\|$ para todo $x, y \in E$, es una métrica.

Demostración. Debemos verificar que d es una métrica. Es decir que es simétrica, positiva y cumple la desigualdad triangular.

notemos que

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|-(y-x)\| = |-1|\|y-x\| = d(y,x).$$

Luego d es simétrica. Si $x \neq y$ entonces $x - y \neq 0$ y entonces $d(x,y) = \|x-y\| > 0$. Por otro lado, para todo $x \in E$ tenemos que

$$d(x,x) = \|x-x\| = \|0 \cdot (x-x)\| = |0|\|x-x\| = 0.$$

Luego d es positiva. Finalmente, para todo $z \in E$ tenemos que

$$\|x-y\| = \|x-z+z-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y).$$

Por lo tanto d cumple la desigualdad triangular. □

Ejemplo 2.1.13

Los siguientes son ejemplos de espacios vectoriales normados:

1. $\mathbb{R}^n$ equipado con alguna de las siguientes normas:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \{|x_i|\}.$$

2. Sea $C([0,1],\mathbb{R})$ el espacio de las funciones continuas que van del intervalo $[0,1]$ a $\mathbb{R}$. Este es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, y equipado con alguna de las normas siguientes es un espacio vectorial normado:

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}, \quad \|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Ejercicio 2.1.14

Sea $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ el conjunto de las clases de equivalencia de números reales cuocientados por la relación de equivalencia $\sim$ donde $x \sim y$ si y solamente si $x = y + k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Muestre que la función

$$d_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}([x]_\sim, [y]_\sim) = \min_{x\in[x]_\sim} \min_{y\in[y]_\sim} |y-x|,$$

define una distancia en $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Muestre además que existen valores únicos $x_0 \in [x]_\sim \cap [0,1)$ y $y_0 \in [y]_\sim \cap [0,1)$ y que se tiene que

$$d_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}([x]_\sim, [y]_\sim) = \min\{|y_0 - x_0|, 1 - |y_0 - x_0|\}.$$

Observación 2.3. En el ejercicio anterior se puede pensar en $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ como un círculo donde se identifican los extremos 0 y 1 del intervalo $[0,1]$. Luego la última expresión para la distancia corresponde al arco más corto entre dos puntos x, y en este círculo.

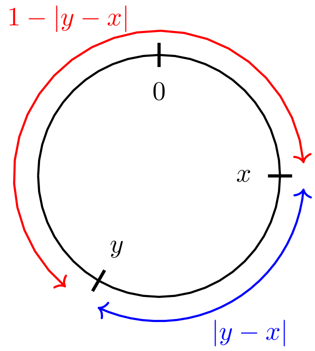


FIGURA 1. La distancia en un círculo es el largo del más corto de los arcos que conectan ambos puntos.

Ejercicio 2.1.15

Sea X un conjunto finito y $R \subseteq X \times X$ una relación:

1. **simétrica**, es decir $(x, y) \in R$ si y solamente si $(y, x) \in R$.
2. **reflexiva**, es decir $(x, x) \in R$ para todo $x \in X$.

Se define la **clausura transitiva** de R como el conjunto $\overline{R} \subset X \times X$ donde $(x, y) \in R$ si existe una secuencia finita $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tal que $x_0 = x$, $x_n = y$ y

$$(x_i, x_{i+1}) \in R, \text{ para todo } 0 \leq i < n.$$

Suponga que la clausura transitiva de R es $X \times X$ y consideremos $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ donde $d(x, x) = 0$ para todo $x \in X$, y para $x, y \in X$ tal que $x \neq y$ se define $d(x, y) = n$ donde $n \geq 1$ es el largo más pequeño de una secuencia $x_0, x_1, \ldots, x_n$ donde $x_0 = x$, $x_n = y$, $(x_i, x_{i+1}) \in R$, para todo $0 \leq i < n$. Muestre que d es una distancia en X.

Ejercicio 2.1.16

Sea X un conjunto y d, d' dos métricas en X. Demuestre o de un contraejemplo para las afirmaciones siguientes:

1. $\delta\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por
$$\delta(x, y) = \text{mín}(d(x, y), d'(x, y)),$$
es una métrica en X.
2. $\delta'\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por
$$\delta'(x, y) = \text{máx}(d(x, y), d'(x, y)),$$
es una métrica en X.

2.2. Esferas y bolas

En esta sección introduciremos conjuntos que pueden describirse utilizando una métrica.

Definición 2.2.1: Bola abierta y cerrada

Sea (X, d) un espacio métrico, $x_0 \in X$ y $R > 0$. Se definen los siguientes subconjuntos de X:

1. La **bola abierta** de centro x_0 y radio R es el conjunto
$$B^\circ(x_0, R) = \{x \in X : d(x_0, x) < R\}.$$
2. La **bola cerrada** de centro x_0 y radio R es el conjunto
$$B(x_0, R) = \{x \in X : d(x_0, x) \leq R\}.$$

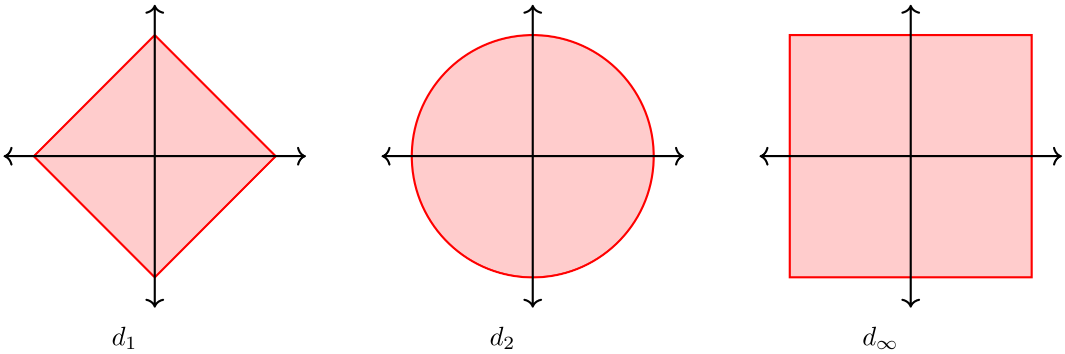


FIGURA 2. La bolas cerradas de centro 0 en $\mathbb{R}^2$ con las métricas d_1, d_2 y d_∞ respectivamente. Las esferas correspondientes están marcadas en un color más oscuro.

Definición 2.2.2: Esfera

Sea (X, d) un espacio métrico, $x_0 \in X$ y $R > 0$. La **esfera** de centro x_0 y radio R es el conjunto
$$S(x_0, R) = \{x \in X : d(x_0, x) = R\}.$$

En otras palabras, la esfera $S(x_0, R)$ es el conjunto de todos los elementos de X que están a distancia R de x_0, la bola abierta $B^\circ(x_0, R)$ es el conjunto de todos los elementos de X que están a distancia menor que R de x_0, y la bola cerrada $B(x_0, R)$ es el conjunto de todos los elementos de X que están a distancia menor o igual a R de x_0.

Ejercicio 2.2.3

Sea (X, d) un espacio métrico, $x_0 \in X$ y $R > 0$. Pruebe que $S(x_0, R) \cup B^\circ(x_0, R) = B(x_0, R)$.

Observación 2.4. Es importante recalcar que las nociones anteriores dependen de la métrica. Si estuviésemos trabajando con más de un espacio métrico utilizaremos las notaciones $B^\circ_{(X,d)}(x_0, R)$, $B_{(X,d)}(x_0, R)$ y $S_{(X,d)}(x_0, R)$ para hacer hincapié en el espacio métrico donde están definidas y evitar ambigüedades.

Ejemplo 2.2.4

Considere $\mathbb{R}$ equipado con la métrica Euclidiana. Sean $x_0 \in \mathbb{R}$ y $R > 0$.

- $S(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| = R\} = \{x_0 - R, x_0 + R\}$.

- $B^\circ(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < R\} = (x_0 - R, x_0 + R)$.
- $B(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \leq R\} = [x_0 - R, x_0 + R]$.

Ejemplo 2.2.5

Sea X un conjunto cualquiera equipado con la métrica discreta d. Sea $x_0 \in X$.

- $S(x_0, 1) = X \setminus \{x_0\}$ y $S(x_0, R) = \varnothing$ si $R \in (0, 1)$.
- Si $R > 1$ entonces $B^\circ(x_0, R) = X$, y si $0 < R \leq 1$ entonces $B^\circ(x_0, R) = \{x_0\}$.
- Si $R \geq 1$ entonces $B(x_0, R) = X$, y si $R < 1$ entonces $B(x_0, R) = \{x_0\}$.

Del último ejemplo se deduce que un conjunto puede ser al mismo tiempo una bola abierta y una bola cerrada.

Ejercicio 2.2.6

Considere el espacio métrico del Ejercicio 2.1.7. Caracterize los valores $R \in \mathbb{R}_{>0}$ para los cuales

$$B(0, R) = B^\circ(0, R).$$

Definición 2.2.7: Conjunto acotado

Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que un subconjunto A de X es **acotado** si existe $x \in X$ y un real $R > 0$ tal que $A \subseteq B(x, R)$.

Observación 2.5. En lo que sigue, cada vez que digamos “bola”, sin especificar si es abierta o cerrada, nos estaremos refiriendo implícitamente a una bola cerrada.

Definición 2.2.8: Diámetro

Sea (X, d) un espacio métrico y A un subconjunto de X. Definimos el **diámetro** de A como

$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{x,y \in A} d(x, y).$$

Ejercicio 2.2.9

Sea (X, d) un espacio métrico. Pruebe que un subconjunto A de X es acotado si y solo si $\operatorname{diam}(A) < \infty$.

Ejercicio 2.2.10

Sea X un conjunto y considere la métrica discreta d. Pruebe que todo conjunto es acotado.

2.3. Conjuntos abiertos

En esta sección estudiaremos la noción de conjunto abierto generalizan la noción de intervalos abiertos en $\mathbb{R}$. Para ello, utilizaremos la noción de bola abierta estudiada en la sección anterior.

Definición 2.3.1: Conjunto abierto

Sea (X, d) un espacio métrico. Un subconjunto A de X es **abierto** si para todo $x \in A$ existe un real $R > 0$ tal que $B^\circ(x, R) \subseteq A$.

Es decir, A es abierto en todo punto $x \in A$ existe una bola abierta de centro x contenida en A.

Ejemplo 2.3.2

Todas las bolas abiertas de X son conjuntos abiertos. En efecto, sean $x_0 \in X$ y $R > 0$. Si $y \in B^\circ(x_0, R)$, entonces $d(x_0, y) = \alpha < R$. Definamos $r = R - \alpha > 0$. Verifiquemos que $B^\circ(y, r) \subseteq B^\circ(x_0, R)$. Si $z \in B^\circ(y, r)$ entonces

$$d(x_0, z) \leq d(x_0, y) + d(y, z) = \alpha + d(y, z) < \alpha + r = R.$$

Esto muestra que la bola abierta de centro x_0 y radio R es un conjunto abierto.

Observación 2.6. Sea (X, d) un espacio métrico, entonces el conjunto vacío $\varnothing$ es un conjunto abierto. En efecto, para todo $x \in \varnothing$ es verdad toda propiedad que yo quiera, ya que no existe ningun $x \in \varnothing$.

Ejercicio 2.3.3

Sea (X, d) un espacio métrico. Muestre que la definición de conjunto abierto puede darse con bolas cerradas. Más precisamente, muestre que $A \subseteq X$ es abierto si y solamente si para todo $x \in A$ existe $R > 0$ tal que $B(x, R) \subseteq A$.

Proposición 2.3.4: Caracterización de abiertos como unión de bolas abiertas

Sea (X, d) un espacio métrico. Un subconjunto A de X es abierto si y solo si A se escribe como una unión de bolas abiertas.

Demostración. Supongamos que A es un subconjunto abierto de X. Entonces para todo $x \in A$ existe $r_x > 0$ tal que $B^\circ(x, r_x) \subseteq A$. Luego, $A = \cup_{x \in A} B^\circ(x, r_x)$.

Supongamos que A es un subconjunto de X que se escribe como unión de bolas abiertas. Digamos $A = \bigcup_{i \in I} B^\circ(x_i, R_i)$. Entonces si $x \in A$, existe $i \in I$ tal que $x \in B^\circ(x_i, R_i) \subseteq A$. $\square$

Corolario 2.3.5

La unión de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico y $\{A_i\}_{i \in I}$ una colección arbitraria de abiertos de X. La Proposición 2.3.4 implica que cada conjunto A_i se escribe como unión de bola abiertas. Es decir, para todo $i \in I$ existe una colección de bolas abiertas $\{B^\circ(x_{i,j}, R_{i,j})\}_{j\in J_i}$ que verifica $A_i = \bigcup_{j\in J_i} B^\circ(x_{i,j}, R_{i,j})$. Luego

$$A = \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J_i} B^\circ(x_{i,j}, R_{i,j}),$$

es una reunión de bolas abiertas. A partir de la Proposición 2.3.4 concluímos que A es abierto. □

Observación 2.7. Sea (X, d) un espacio métrico. Del Corolario 2.3.5 se deduce que X es abierto. En efecto, podemos escribir $X = \bigcup_{x\in X} B^\circ(x, 1)$.

Ejemplo 2.3.6: La intersección de abiertos no es necesariamente un abierto

La intersección de conjuntos abiertos no siempre es un conjunto abierto, como lo muestra el siguiente ejemplo: para cada $n \in \mathbb{N}$ considere el intervalo abierto $I_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Estos son conjuntos abiertos en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Sin embargo, la intersección

$$\bigcap_{n\geq 1} I_n = \bigcap_{n\geq 1}\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$$

no es un conjunto abierto. En efecto, dado cualquier $R > 0$, la bola de centro 0 y radio R no está contenida en $\{0\}$.

El ejemplo anterior muestra que no siempre obtendremos abiertos al intersectar colecciones de conjuntos abiertos, sin embargo si nos restringimos a una cantidad finita de conjuntos abiertos, sí es cierto que su intersección es un conjunto abierto.

Proposición 2.3.7: Intersección finita de abiertos es abierto

La intersección finita de conjuntos abiertos es un abierto. Es decir, si (X, d) es un espacio métrico, $n \in \mathbb{N}$ y $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$ son abiertos en (X, d), entonces $\bigcap_{i=1}^n A_i$ es un abierto.

Demostración. Sea $A = \bigcap_{i=1}^n A_i$. Para probar que A es abierto, debemos mostrar que para todo $x \in A$ existe $R > 0$ tal que $B^\circ(x, R) \subseteq A$.

Sea $x \in A$. Por definición de conjunto abierto, para todo $1 \leq i \leq n$ existe $R_i > 0$ tal que $B^\circ(x_i, R_i) \subseteq A_i$. Si $R = \text{mín}\{R_1, \ldots, R_n\}$ entonces $R > 0$ y $B^\circ(x, R) \subseteq B^\circ(x, R_i) \subseteq A_i$, para todo $1 \leq i \leq n$. Luego, $B^\circ(x, R) \subseteq \bigcap_{i=1}^n A_i = A$. □

Sea (X, d) un espacio métrico cualquiera. Hemos visto que la colección de abiertos

1. contiene a X y $\varnothing$.
2. es estable bajo unión,
3. es estable bajo intersección finita,

Veremos más adelante que una gran parte de los conceptos asociados a una métrica pueden definirse utilizando únicamente los conjuntos abiertos sin necesariamente hacer referencia a una métrica. Lo anterior justifica una definición más abstracta de conjuntos abiertos que se denomina **topología**.

Definición 2.3.8: Topología

Sea X un conjunto. Una colección $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X se denomina **topología** si satisface que

1. Para toda colección $\{A_i\}_{i\in I}$ con $A_i \in \mathcal{T}$ se tiene que
$$\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}.$$
2. Para todo par de conjuntos $A, B \in \mathcal{T}$ se tiene que $A \cap B \in \mathcal{T}$.
3. $\varnothing \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$.

Al par $(X, \mathcal{T})$ se le denonina **espacio topológico** y en éste contexto a los elementos $A \in \mathcal{T}$ se les dice **conjuntos abiertos**.

En este apunte nos enfocaremos en el caso de los espacio métricos y tan solo mencionaremos de manera esporádica lo que sucede en el caso más general de espacios topológicos. Sin embargo es conveniente conocer al menos de manera básica algunos conceptos de topología.

En el caso de un espacio métrico (X, d), es directo de la discusión anterior que la colección $\mathcal{T} = \{A \subseteq X : A \text{ es un abierto en } (X, d)\}$ es una topología. Luego todo espacio métrico induce un espacio topológico. Sin embargo, veremos que existen espacios topológicos que no provienen de ninguna métrica.

Ejemplo 2.3.9: La topología gruesa

Sea X un conjunto con al menos dos elementos distintos. La colección de conjuntos $\mathcal{T} = \{\varnothing, X\}$ es una topología y se le denomina **topología gruesa**.

Definición 2.3.10: Base de una topología

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X se denomina **base** si todo conjunto $A \in \mathcal{T}$ se puede escribir como unión de elementos de $\mathcal{B}$.

La intuición asociada a la definición anterior es la siguiente: en general puede ser complejo dar una descripción exacta de todos los elementos de una topología, por lo tanto es más sencillo tan solo describir una colección de conjuntos que "generen la topología". Una base es precisamente eso, un conjunto de elementos que permiten describir todos los elementos de $\mathcal{T}$ mediante uniones.

Observación 2.8. La colección de bolas abiertas en un espacio métrico (X, d) es una base, pues cualquier conjunto abierto se escribe como unión de bolas abiertas.

Definición 2.3.11: Espacio de Hausdorff

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Se dice que $(X, \mathcal{T})$ es de **Hausdorff** o que **separa puntos** si para todo $x, y \in X$ tales que $x \neq y$ existen conjuntos abiertos U_x y V_x tales que $x \in U_x$, $y \in V_x$ y $U_x \cap V_x = \varnothing$.

Ejercicio 2.3.12

Muestre que todo espacio métrico es de Hausdorff

Ejercicio 2.3.13

De un ejemplo de un espacio topológico que no sea Hausdorff. Concluya utilizando el ejercicio anterior que hay espacios topológicos cuya topología no está generada por una métrica.

Definición 2.3.14: Vecindad

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Una **vecindad** de un punto $x \in X$ es un subconjunto V de X que contiene algún abierto $A \subseteq V$ tal que $x \in A$.

Notemos que los conjuntos abiertos son vecindades de cada uno de sus puntos. La bola cerrada $B(x, R)$ es una vecindad de x pues contiene a la bola abierta $B^\circ(x, R)$.

Ejercicio 2.3.15

Sea (X, d) un espacio métrico. pruebe que la intersección de todas las vecindades de x es igual a $\{x\}$.

El resultado del ejercicio anterior no es válido para un espacio topológico. En efecto, si tomamos $X = \mathbb{R}$ y la topología gruesa $\mathcal{T} = \{\varnothing, X\}$, entonces la única vecindad de todo $x \in \mathbb{R}$ es el conjunto X, luego la intersección de todas las vecindades de x es $\mathbb{R}$ y no $\{x\}$. Acá obtenemos una nueva prueba de que la topología gruesa no es metrizable.

Proposición 2.3.16: Caracterización de abiertos por vecindades

Sea (X, d) un espacio métrico. Un subconjunto $A \subseteq X$ es abierto si y solo si es una vecindad de todos sus puntos.

Demostración. Si A es abierto, entonces para todo $x \in A$ existe una bola abierta de centro x que está contenida en A y, por lo tanto, A es una vecindad de x.

Supongamos que A es vecindad de todos sus puntos, entonces para todo $x \in A$ existe un abierto $U_x \subseteq A$ que lo contiene. Luego, $A = \bigcup_{x \in A} U_x$ es un abierto, pues es reunión de abiertos. □

Definición 2.3.17: Interior de un conjunto

Sea (X, d) un espacio métrico. El interior de un subconjunto $A \subseteq X$ es la unión $\operatorname{Int}(A)$ de todos los abiertos contenidos en A.

$$\operatorname{Int}(A) = \bigcup_{U \text{ abierto }, U \subseteq A} U.$$

El interior de A lo anotaremos usualmente por $\operatorname{Int}(A)$, también se utiliza a veces la notación $\mathring{A}$.

Como $\operatorname{Int}(A)$ es una reunión de abiertos, es abierto. Además, si B es un abierto contenido en A, entonces por definición de interior B también está contenido en $\operatorname{Int}(A)$. De esto se deduce que $\operatorname{Int}(A)$ es el abierto más grande en el sentido de la contención de conjuntos en A. En particular, si A es abierto, entonces $\operatorname{Int}(A) = A$.

Ejercicio 2.3.18

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Muestre que si para todo $x \in X$

$$\text{Int}(\{x\}) = \{x\},$$

entonces $\mathcal{T}$ es la topología generada por la métrica discreta (llamda **topología discreta**).

Ejercicio 2.3.19

Considere $X = \mathbb{R}$ equipado con la métrica Euclidiana. Pruebe que

$$\text{Int}(\mathbb{Q}) = \varnothing.$$

Proposición 2.3.20

Sea (X, d) un espacio métrico y $A, B \subseteq X$. Se tiene que

$$\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B).$$

Demostración. $\text{Int}(A \cap B)$ es un abierto contenido en $A \cap B$, por lo tanto, $\text{Int}(A \cap B)$ está contenido en A y en B. Por definición de interior, esto implica que $\text{Int}(A \cap B) \subseteq \text{Int}(A)$ e $\text{Int}(A \cap B) \subseteq \text{Int}(B)$. Luego, $\text{Int}(A \cap B) \subseteq \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$.

Para probar la otra inclusión, observe que $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$ es un abierto, pues es una intersección finita de abiertos. Además, $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$ es un abierto contenido en $A \cap B$, lo que implica que $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) \subseteq \text{Int}(A \cap B)$. $\square$

Ejercicio 2.3.21

Muestre con un ejemplo que $\text{Int}(A \cup B)$ no necesariamente es igual a $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$.

2.4. Conjuntos cerrados

En esta sección estudiaremos los complementos de los conjuntos abiertos, los cuales se denominan conjuntos cerrados. Del mismo modo que los conjuntos abiertos, estos satisfacen muchas propiedades interesantes que estudiaremos a continuación.

Definición 2.4.1: Conjunto cerrado

Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que $A \subseteq X$ es **cerrado** si el complemento de A es un conjunto abierto.

Si leemos la definición de abierto, obtenemos que un conjunto $A \subseteq X$ es cerrado si para todo $y \in X \setminus A$ existe $R > 0$ tal que $B(y, R) \cap A = \varnothing$.

Ejercicio 2.4.2

Sea (X, d) un espacio métrico. Pruebe que las bolas cerradas de X son conjuntos cerrados.

Ejemplo 2.4.3

Sea (X, d) un espacio métrico. Todo conjunto singleton $\{x\}$ es cerrado. En efecto, si $y \in X \setminus \{x\}$, entonces $d(x, y) = \alpha > 0$. Luego, la bola abierta $B^\circ(y, \alpha)$ no contiene a x y, por lo tanto, $B^\circ(y, \alpha) \subseteq X \setminus \{x\}$. Esto prueba que $\{x\}$ es cerrado.

Ejercicio 2.4.4

Sea (X, d) un espacio métrico. Pruebe que las bolas cerradas de X son conjuntos cerrados.

Los conjuntos cerrados satisfacen propiedades básicas que son complementarias a las de los conjuntos abiertos. Las resumiremos en la proposición siguiente cuya demostración se dejará como ejercicio.

Proposición 2.4.5

Sea (X, d) un espacio métrico. Los subconjuntos cerrados X satisfacen las siguientes propiedades:

1. Son estables bajo intersección. Es decir, si $(A_i)_{i \in I}$ es una colección de conjuntos cerrados, entonces $\bigcap_{i \in I} A_i$ es cerrado.
2. Son estables bajo unión finita. Es decir, si $(A_i)_{i=1}^n$ es una colección finita de conjuntos cerrados, entonces $\bigcup_{i=1}^n A_i$ es cerrado.
3. X y $\varnothing$ son cerrados.

Ejercicio 2.4.6

Demuestre la Proposición 2.4.5 utilizando las propiedades de conjuntos abiertos y de complementos de conjuntos.

Ejercicio 2.4.7

Considere $X = \mathbb{R}$ con la métrica Euclidiana. Pruebe que para todo $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$ el intervalo cerrado $[a, b]$ es un conjunto cerrado, y que los intervalos de la forma $(a, b], [a, b)$ no son conjuntos ni abiertos ni cerrados.

Ejemplo 2.4.8

Considere $X = \mathbb{R}$ con la métrica Euclidiana. La unión $\bigcup_{n \geq 2} [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}] = (0, 1)$ no es un cerrado. Luego la unión de conjuntos cerrados en general no es cerrada.

Ejercicio 2.4.9

Sea (X, d) un espacio métrico. Pruebe que las esferas de X son cerradas.

Ejercicio 2.4.10

Sea (X, d) un espacio métrico donde d es la métrica discreta. Prueba que todos los conjuntos son abiertos y cerrados a la vez. *Indicación: observe que* $B^\circ(x, \frac{1}{2}) = \{x\}$ *para todo* x*. Luego, si* $A \subseteq X$ *entonces* $A = \bigcup_{x\in A}\{x\} = \bigcup_{x\in A} B^\circ(x, \frac{1}{2})$*. Esto muestra que* A *es unión de abiertos y, por lo tanto, abierto. Proceda de manera análoga con* $X \setminus A$ *para mostrar que es abierto.*

Observación 2.9. En el ejemplo anterior se muestra que un conjunto diferente de X y $\varnothing$ puede ser abierto y cerrado a la vez. A estos conjuntos se los denomina **abierto-cerrado**. En inglés a estos conjuntos se les llama **clopen**.

A continuación estudiaremos una propiedad que es complementaria a la noción de interior de un conjunto. Es decir, su exterior.

Definición 2.4.11: Exterior de un conjunto

Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. El **exterior** $\operatorname{Ext}(A)$ de A es el interior del conjunto $X \setminus A$.

En otras palabras, el exterior de un conjunto se define como el interior de su complemento. Se puede utilizar la notación $\operatorname{Ext}(A)$, pero es más usual escribir simplemente $\operatorname{Int}(X \setminus A)$.

Observación 2.10. El exterior de A es el conjunto abierto más grande en el sentido de la contención de conjuntos que es disjunto de A. En efecto, si $B \subseteq X$ es disjunto de A, entonces $B \subseteq X \setminus A$, y si además B es abierto, entonces $B \subseteq \operatorname{Int}(X \setminus A) = \operatorname{Ext}(A)$.

Definición 2.4.12: Frontera de un conjunto

Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. La **frontera** de A es el conjunto $\partial(A)$ de puntos de X que no están ni en el interior de A ni en el exterior de A. Es decir,

$$\partial(A) = X \setminus (\operatorname{Int}(A) \cup \operatorname{Int}(X \setminus A))$$

La frontera de A es un cerrado, pues es el complemento de la unión de dos abiertos. También es fácil ver que para todo $A \subseteq X$, la unión de la frontera, el interior y el exterior de A es igual a X:

$$X = \operatorname{Int}(A) \cup \operatorname{Ext}(A) \cup \partial(A), \text{ para todo } A \subseteq X.$$

Ejemplo 2.4.13

Considere $\mathbb{R}$ con la métrica Euclidiana y sea $A = (-1, 1]$. Luego

1. El interior de A es el conjunto $\operatorname{Int}(A) = (-1, 1)$.
2. El exterior de A es el conjunto $\operatorname{Ext}(A) = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.

3. La frontera A es el conjunto $\partial(A) = \{-1, 1\}$.

En este ejemplo simple se puede observar que la frontera de un conjunto no tiene por qué ser subconjunto del conjunto original.

Proposición 2.4.14: Caracterización de puntos de frontera por vecindades

Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. El punto $x \in X$ está en $\partial(A)$ si y solo si toda vecindad V de x contiene elementos de $X \setminus A$ y A, es decir

$$V \cap (X \setminus A) \neq \varnothing \text{ y } V \cap A \neq \varnothing.$$

Demostración. Supongamos primero que x está en la frontera de A. Basta probar que cualquier bola abierta de centro x contiene elementos de A y $X \setminus A$. Para esto, sea $R > 0$ y consideremos la bola abierta $B^\circ(x, R)$.

Como x está en la frontera, entonces $x \notin \mathrm{Int}(A)$. Luego, $B^\circ(x, R) \nsubseteq A$, pues de lo contrario, la bola $B_0(x, R)$ sería un abierto contenido en A, y entonces debería estar contenida en $\mathrm{Int}(A)$. Esto implica que existe $y \in (X \setminus A) \cap B^\circ(x, R)$. Como $x \notin \mathrm{Int}(X \setminus A)$, de manera análoga, como $x \notin \mathrm{Int}(X \setminus A)$ deducimos que $B^\circ(x, R) \cap A \neq \varnothing$.

Supongamos ahora que toda vecindad de x contiene elementos de A y $X \setminus A$. Esto implica que toda bola abierta de centro x no está contenida ni en A ni en $X \setminus A$. Luego, x no está contenido ni en $\mathrm{Int}(A)$ ni en $\mathrm{Int}(X \setminus A)$. Es decir, x está en la frontera de A. $\square$

Ejercicio 2.4.15

Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Pruebe que A está contenido en la unión de su interior y su frontera.

El ejercicio anterior motiva la noción de adherencia de un conjunto. A continuación veremos una definición de adherencia y luego probaremos que coincide con la unión de su interior y su frontera.

Definición 2.4.16: Adherencia de un conjunto

Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. La **adherencia** de A es la $\overline{A}$ intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A.

$$\overline{A} = \bigcap_{C \text{ cerrado }, A \subseteq C} C.$$

La adherencia de A la escribiremos usualmente como $\overline{A}$. A los elementos de $\overline{A}$ se les llama **puntos adherentes** de A.

La adherencia de A es un conjunto cerrado, pues es una intersección de cerrados. Además, $\overline{A}$ es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a A. En efecto, si $B \subseteq X$, entonces por definición de adherencia, $A \subseteq \overline{A} \subseteq B$.

La siguiente proposición nos entrega varias formas de caracterizar la adherencia de un conjunto.

Proposición 2.4.17: Equivalencias de adherencia

Sea (X, d) un espacio métrico y sean $A, C \subseteq X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $C = \overline{A}$.
2. C es el complemento del exterior de A.
3. C es la unión del interior de A y la frontera de A.
4. $C = \{x \in X : B^\circ(x, R) \cap A \neq \varnothing, \text{ para todo } R > 0\}$.

Demostración. Observamos primero que $X = \operatorname{Int}(A) \cup \operatorname{Ext}(A) \cup \partial(A)$. Como la intersección de estos tres conjuntos es vacía a pares, se tiene que (2) y (3) son equivalentes.

Supongamos ahora (1) y probemos (4). Definamos

$$F = \{x \in X : B^\circ(x, R) \cap A \neq \varnothing, \text{ para todo } R > 0\}.$$

Debemos probar que $\overline{A} = F$. Claramente $A \subseteq F$ y F es cerrado, luego $\overline{A} \subseteq F$. Por el otro lado, si $x \notin \overline{A}$, entonces existe un cerrado que contiene a A pero no a x, luego x está contenido en un abierto que no intersecta a A y por lo tanto existe $R > 0$, tal que $B^\circ(x, R) \cap A = \varnothing$ por lo cual $x \notin F$. Concluimos $X \setminus \overline{A} \subseteq X \setminus F$ y por lo tanto $F \subseteq \overline{A}$.

Supongamos (4) y probemos (2). Como $C = \{x \in X : B^\circ(x, R) \cap A \neq \varnothing, \text{ para todo } R > 0\}$. Entonces $X \setminus C$ es el conjunto de los $x \in X$ para los que existe $R > 0$ tal que $B^\circ(x, R) \subseteq X \setminus A$. Es decir, $X \setminus C = \operatorname{Int}(X \setminus A)$ y luego $C = X \setminus \operatorname{Ext}(A)$.

Supongamos (2) y probemos (1). Como el exterior de A es abierto se tiene que C es cerrado. Más aún, como $\operatorname{Ext}(A) \cap A = \varnothing$, tenemos que $A \subseteq C$ y luego $\overline{A} \subseteq \overline{C} = C$. Por otro lado, si F es un cerrado que contiene a A, entonces $X \setminus F \subseteq X \setminus A$ es abierto, por lo cual necesariamente tenemos que $X \setminus F \subseteq \operatorname{Ext}(A) = X \setminus C$, luego $C \subseteq F$. Tomando $F = \overline{A}$ deducimos que $C \subseteq \overline{A}$ y luego $C = \overline{A}$. □

Proposición 2.4.18

Sea (X, d) un espacio métrico y $A, B \subseteq X$. Entonces

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Demostración. Observar que $\overline{A} \cup \overline{B}$ es un cerrado que contiene a $A \cup B$. Esto implica que $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Por otro lado, si C es un cerrado que contiene a $A \cup B$, entonces C es un cerrado que contiene a A y a B. Luego, $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq C$. Escogiendo C igual a $\overline{A \cup B}$ se deduce que $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. □

Ejercicio 2.4.19

Mostrar que la Proposición 2.4.18 no es válida si se intercambia $\cup$ por $\cap$, o si se considera la unión de una infinidad de conjuntos.

Ejercicio 2.4.20

Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Pruebe que la frontera de A es igual a $\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

Ejercicio 2.4.21

Sea (X,d) un espacio métrico y $(A_i)_{i\in I}$ una colección de conjuntos en X. Para cada una de las cuatro afirmaciones siguientes de una demostración o un contraejemplo.

1. Se tiene que $\bigcup_{i\in I}\overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$.
2. Se tiene que $\bigcup_{i\in I}\overline{A_i} \supseteq \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$.
3. Se tiene que $\bigcap_{i\in I}\operatorname{Int}(A_i) \subseteq \operatorname{Int}(\bigcap_{i\in I} A_i)$.
4. Se tiene que $\bigcap_{i\in I}\operatorname{Int}(A_i) \supseteq \operatorname{Int}(\bigcap_{i\in I} A_i)$.

2.5. Conjuntos densos, nunca densos y espacios separables

Consideremos al conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ como un subconjunto de $\mathbb{R}$ con la métrica Euclidiana. Si intentamos "dibujar" $\mathbb{Q}$ en la recta real, no somos capaces de distinguirlo de $\mathbb{R}$ dado que para cualquier número real r siempre existe un número racional q a una distancia arbitrariamente pequeña de r. En esta sección introduciremos el concepto de conjunto denso que busca formalizar la idea anterior.

Definición 2.5.1: Conjunto denso

Sea (X,d) un espacio métrico. Decimos que el conjunto D es **denso** si para todo $x\in X$ y todo $R>0$ tenemos que $B^\circ(x,R)\cap D\neq\varnothing$.

r

En otras palabras, D es denso si toda bola abierta intersecta D.

Ejercicio 2.5.2

Pruebe que D es denso si y solamente si para todo $x\in X$ y todo $R>0$ tenemos que $B(x,R)\cap D\neq\varnothing$. Es decir, la condición de ser denso se puede definir también con bolas cerradas.

Ejemplo 2.5.3

El conjunto $D=X$ es denso con respecto a cualquier métrica.

Ejemplo 2.5.4

Los conjuntos $D=\mathbb{Q}$ y $D'=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ son densos en $\mathbb{R}$ con la métrica Euclidiana.

Ejercicio 2.5.5

Sea $X=[0,1]$ con la métrica Euclidiana heredada de $\mathbb{R}$. Pruebe que el conjunto

$$D=\left\{\frac{k}{2^n} : n\geq 0,\ 0\leq k\leq 2^n\right\},$$

es denso en $[0,1]$. D se conoce como el conjunto de los **números diádicos**.

A veces suele usarse una relativización de la noción de denso. Decimos que un conjunto D es **denso en un conjunto** A, si para todo $x \in A$ y todo $R > 0$ tenemos que $B^\circ(x,R) \cap D \neq \varnothing$. De ésta manera la noción de conjunto denso "a secas" corresponde un conjunto denso en el espacio entero X.

Proposición 2.5.6: Formulaciones equivalentes de densidad

Sea (X,d) un espacio métrico y $D \subseteq X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. D es denso en X.
2. Todo abierto no vacío $U \subseteq X$ satisface $D \cap U \neq \varnothing$.
3. Para todo $R > 0$ y $x \in X$ existe $y \in D$ tal que $d(x,y) < R$.
4. $\overline{D} = X$.

Demostración. Supongamos (1) y probemos (2). Si U es un abierto no vacío entonces para $x_0 \in U$ existe $R > 0$ tal que $B^\circ(x_0,R) \subseteq U$, como asumimos (1) tenemos que $B^\circ(x_0,R) \cap D \neq \varnothing$ y luego $U \cap D \neq \varnothing$.

Supongamos (2) y probemos (3). Sean $R > 0$, $x \in X$ y consideremos la bola abierta $B^\circ(x,R)$. Por (2) tenemos que $B^\circ(x,R) \cap D \neq \varnothing$, luego existe $y \in B^\circ(x,R) \cap D$. Como $y \in B^\circ(x,R)$, se sigue que $d(x,y) < R$.

Supongamos (3) y probemos (4). En la Proposición 2.4.17 mostramos que que si $A \subseteq X$, entonces $\overline{A}$ es el conjunto de todos los $x \in X$ tales que para todo $R > 0$, $B^\circ(x,R) \cap A \neq \varnothing$. Claramente siempre se tiene que $\overline{D} \subseteq X$. Por (3) tenemos que para todo $x \in X$ y $R > 0$ existe $y \in D$ tal que $d(x,y) < R$, luego $y \in B^\circ(x,R) \cap D$. Esto muestra que $X \subseteq \overline{D}$.

Supongamos (4) y probemos (1). Como $\overline{D} = X$, tenemos que para todo $x \in X$ y $R > 0$ se cumple que $B^\circ(x,R) \cap A \neq \varnothing$, lo cual es exactamente la definición de densidad. □

Observación 2.11. Las equivalencias anteriores nos otorgan una noción de densidad para espacios topológicos. Diremos que un conjunto $D \subseteq X$ de un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$ es denso si todo $U \in \mathcal{T}$ intersecta a D.

Recordemos que un conjunto X se dice **numerable** si existe una biyección entre X y el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$. Decimos que un conjunto es **contable** si X es finito o numerable.

Definición 2.5.7: Espacio métrico separable

Se dice que el espacio métrico (X,d) es **separable** si existe $D \subseteq X$ que es denso y contable.

La noción de espacio métrico separable es muy útil, pues permite hacer pruebas utilizando técnicas como la inducción o el argumento diagonal. Veremos varias aplicaciones de esta propiedad en los capítulos siguientes de este apunte.

Ejemplo 2.5.8

$\mathbb{R}$ con la métrica Euclidiana es separable, pues $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto denso y numerable.

Ejercicio 2.5.9

Sea X es un conjunto y d la métrica discreta en X. muestre que (X, d) es seprable si y solamente si X es contable.

Ejercicio 2.5.10

Muestre que $\mathbb{R}^n$ dotado de cualquiera de las métricas d_1, d_2 o d_∞ es separable.

Ejercicio 2.5.11

Considere el espacio vectorial $\ell^2(\mathbb{R})$ definido como

$$\ell^2(\mathbb{R}) = \left\{ f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \sum_{n \geq 0} |f(n)|^2 < \infty \right\},$$

dotado de la norma $\|\cdot\|_2$ dada por

$$\|f\|_2 = \sum_{n \geq 0} |f(n)|^2.$$

Muestre que $(\ell^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ es separable.

Indicación: Puede usar que el conjunto de todas las funciones $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ tales que existe algún $N \in \mathbb{N}$ tal que $f(m) = 0$ para $m \geq N$ es numerable.

Ejercicio 2.5.12: (difícil)

Considere el espacio vectorial $\ell^\infty(\mathbb{R})$ definido como

$$\ell^\infty(\mathbb{R}) = \left\{ f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |f(n)| < \infty \right\},$$

dotado de la norma $\|\cdot\|_\infty$ dada por

$$\|f\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |f(n)|.$$

Muestre que $(\ell^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ no es separable.

Indicación: muestre que para cada $S \subseteq \mathbb{N}$ es posible construír una función $f_S \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de modo tal que si S, S' son dos subconjuntos distintos de $\mathbb{N}$ entonces

$$\|f_S - f_{S'}\|_\infty = 1.$$

Indicación: muestre que si $M \subseteq X$ es tal que existe una constante $C > 0$ tal que para todo $x, y \in M$ se cumple que $d(x, y) \geq C$, entonces si D es denso en X debe existir[a] una función inyectiva $\varphi \colon M \to D$ y por lo tanto $|D| \geq |M|$.

[a] Para hacer formalmente esto se utiliza el axioma de elección, ver anexos.

A continuación definiremos una propiedad que es complementaria a la densidad.

Definición 2.5.13: Conjunto nunca denso

Sea (X,d) un espacio métrico. Se dice que $A \subseteq X$ es **nunca denso** si el exterior de A es denso en X.

A los conjuntos nunca densos se los denomina también **denso en ninguna parte** o **conjuntos diseminados**. La siguiente proposición entrega la correcta intuición sobre los conjuntos nunca densos: son los conjuntos que no son densos en ningún conjunto.

Proposición 2.5.14: Caracterización de conjuntos nunca densos

Sea (X,d) un espacio métrico. Un conjunto $A \subseteq X$ es nunca denso si y solo si $\operatorname{Int}(\overline{A}) = \varnothing$.

Demostración. Si existe $x \in \operatorname{Int}(\overline{A})$ entonces existe $R > 0$ tal que $B^\circ(x,R) \subseteq \overline{A}$. Ya que por la Proposición 2.4.17 $\overline{A} = X \setminus (\operatorname{Int}(X \setminus A))$, lo anterior implica que $B^\circ(x,R) \cap \operatorname{Int}(X \setminus A) = \varnothing$ y, por lo tanto, $\operatorname{Int}(X \setminus A)$ no es denso. Con esto mostramos que si A es nunca denso entonces $\operatorname{Int}(\overline{A}) = \varnothing$.

Si $\operatorname{Int}(\overline{A}) = \varnothing$, entonces para todo $x \in X$ y todo $R > 0$ la bola $B^\circ(x,R)$ intersecta $X \setminus \overline{A}$. Como $X \setminus \overline{A} = \operatorname{Int}(X \setminus A)$, esto implica que todo $x \in X$ está en $\overline{\operatorname{Int}(X \setminus A)}$, lo que significa que $\operatorname{Int}(X \setminus A)$ es denso. $\square$

Ejercicio 2.5.15

Considere $\mathbb{R}$ con la métrica Euclidiana. Muestre que el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros es nunca denso.

Observación 2.12. No es suficiente pedir que el complemento de un conjunto sea denso para que el conjunto sea nunca denso, como vimos anteriormente, tanto $\mathbb{Q}$ como $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son conjuntos densos en $\mathbb{R}$ con la métrica Euclidiana. Tampoco es cierto que el complemento de un denso sea un conjunto nunca denso.

Observación 2.13. El interior de $\overline{A}$ no necesariamente es igual al interior de A. Por ejemplo, si tomamos $\mathbb{R}$ con la métrica Euclidiana, el interior de $\mathbb{Q}$ es vacío, pero el interior de $\overline{Q} = \mathbb{R}$ es igual a $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2.5.16

Considere $[0,1]$ con la métrica Euclidiana. El **conjunto de Cantor** es el conjunto C de todos los elementos en $x \in [0,1]$ que pueden escribirse de la forma

$$x = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{3^k},$$

donde $(a_k)_{k\geq 1}$ es una secuencia de enteros que toman solo los valores $\{0,2\}$. Muestre que C es un conjunto nunca denso.

2.6. Sucesiones en espacios métricos

Definición 2.6.1: Sucesión

Sea X un conjunto. Una **sucesión** o **secuencia** en X es una función $x\colon \mathbb{N} \to X$.

Al igual que en el caso de una sucesión real, utlizaremos la notación $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para denotar la función $x\colon \mathbb{N} \to X$, y queremos pensarla como una tupla infinita

$$(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots)\,.$$

A veces es también conveniente indexar una sucesión por algún subconjunto infinito de los naturales. De éste modo también denominaremos sucesión a una función $x\colon S \to X$ donde $S \subset \mathbb{N}$ es infinito. De manera más habitual utilizaremos la notación $(x_n)_{n\geq m}$ para denotar una sucesión $x\colon \{n \in \mathbb{N} : n \geq m\} \to X$. En general la elección del conjunto de índices de una sucesión no es muy importante, una sucesión $(x_n)_{n\in S}$ puede reescribirse como una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ del mismo modo que explicitamos en los preliminares. Luego la elección de un conjunto de índices es simplemente un tema de conveniencia. Abstractamente podemos suponer siempre que las sucesiones están indexadas por $\mathbb{N}$.

En contadas ocasiones también utilizaremos la notación $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en vez de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Haremos ésto cuando queramos pensar en el conjunto que contiene a todos los elementos de la secuencia.

Cuando (X, d) es $\mathbb{R}$ con la métrica Euclidiana, hablaremos de **sucesiones reales**.

Definición 2.6.2: límite de una sucesión

Sea (X, d) un espacio métrico y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** a $\bar{x} \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$,

$$d(x_n, \bar{x}) \leq \varepsilon.$$

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\bar{x} \in X$, decimos que $\bar{x}$ es el **límite** de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y escribiremos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}.$$

En otras palabras, una sucesión converge a un valor $\bar{x} \in X$ si para toda bola cerrada centrada en $\bar{x}$, existe a lo más una cantidad finita de elementos de la sucesión que no están contenidos en ella (los x_m tal que $m < N$ son los únicos elementos que podrían no estar en la bola).

Observación 2.14. Notemos que si modificamos la definición de límite y utilizamos bolas abiertas (es decir, cambiamos "$d(x_n, \bar{x}) \leq \varepsilon$" por "$d(x_n, \bar{x}) < \varepsilon$") obtenemos exactamente la misma noción.

En el caso más general de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, decimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un valor $\bar{x} \in X$ si para toda vecindad $U_{\bar{x}}$ de $\bar{x}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U_{\bar{x}}$ para todo $n \geq N$. En otras palabras, la noción de convergencia puede definirse tan solo utilizando una topología y no requiere necesariamente de una distancia.

Ejercicio 2.6.3: Unicidad del límite

Suponga que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en el espacio métrico (X, d) que converge a $\bar{x} \in X$ y que converge a $\bar{y} \in X$. Muestre que $\bar{x} = \bar{y}$.

Observación 2.15. El resultado del ejercicio anterior no es válido en espacios topológicos arbitrarios. En ese caso, se debe pedir que el espacio topológico sea Hausdorff.

Ejercicio 2.6.4

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en el espacio métrico (X, d). Muestre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\bar{x} \in X$ si y solamente si

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0.$$

A continuación, utilizaremos la noción de convergencia de sucesiones para dar caracterizaciones de la adherencia y los conjuntos cerrados.

Proposición 2.6.5: Caracterización de adherencia por sucesiones

Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Se tiene que $x \in \overline{A}$ si y solo si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A que converge a x.

Demostración. Sea $x \in \overline{A}$. Por la Proposición 2.4.17 tenemos que $B^\circ(x, R) \cap A \neq \varnothing$ para todo $R > 0$. Para $n \geq 1$ consideramos $R = \frac{1}{n}$, tomamos un valor $x_n \in B^\circ(x, R) \cap A$ y formamos la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$.

Dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$, luego si $n \geq N$ tenemos que $x_n \in B^\circ(x, \frac{1}{n})$ por lo cual

$$d(x, x_n) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \leq \varepsilon.$$

Lo cual muestra que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a x. Por otro lado, si supongamos que existe $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de elementos de A que converge a x, entonces para todo $R > 0$ tenemos que $B^\circ(x, R) \cap A$, lo cual implica que $x \in \overline{A}$. $\square$

El resultado anterior se puede escribir del siguiente modo

$$\overline{A} = \{x \in X : \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tal que } \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A \text{ y } \lim_{n\to\infty} x_n = x\}.$$

Lo cual es bastante útil para demostrar que un conjunto no es cerrado, pues basta encontrar una sucesión que tome valores en el conjunto y que converga a un valor que no esté en el conjunto.

Corolario 2.6.6: Caracterización de cerrados por sucesiones

Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Se tiene que A es cerrado si toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A que converge, converge a un valor $x \in A$.

Observación 2.16. En el corolario anterior se enuncia una propiedad sobre las sucesiones convergentes y no sobre todas las sucesiones. Por ejemplo, el conjunto $A = [-1, 1]$ es un cerrado en $\mathbb{R}$ con la métrica Euclidiana pero la sucesión real $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge.

Ejemplo 2.6.7

Sea $\mathbb{R}$ con la métrica Euclidiana. Entonces $A = (0, 1]$ no es cerrado. Si lo fuese, entonces toda sucesión con valores en A que converge debe converger a un valor en A, sin embargo la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $0 \notin A$.

Definición 2.6.8: Puntos de acumulación

Sea (X, d) un espacio métrico y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión. Se dice que $x \in X$ es un **punto de acumulación** de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $m \geq n$ tal que

$$d(x, x_m) \leq \varepsilon.$$

Ejercicio 2.6.9

Sea (X, d) un espacio métrico. Muestre que x es punto de acumulación de una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si y solamente si para toda vecindad V_x de x y para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $m \geq n$ tal que $x_m \in V_x$.

Del ejercicio anterior se desprende que la noción de puntos de acumulación es también topológica.

Ejemplo 2.6.10

Sea $\mathbb{R}$ con la métrica Euclidiana. La sucesión real $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge pero tiene dos puntos de acumulación, -1 y 1.

Observación 2.17. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente en un espacio métrico, entonces su límite es su único punto de acumulación. En particular, si una sucesión tiene más de un punto de acumulación, entonces no puede converger.

Ejercicio 2.6.11: (difícil)

Sea $\alpha \in [0, 1) \setminus \mathbb{Q}$ un número irracional. Muestre que el conjunto de puntos de acumulación de la secuencia

$$(\alpha n - \lfloor \alpha n \rfloor)_{n\in\mathbb{N}},$$

es el intervalo $[0, 1]$. Recuerde que la parte entera $\lfloor x \rfloor$ de x es el entero más grande que es menor o igual a x.

Definición 2.6.12: Subsucesión

Sea (X, d) un espacio métrico y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión. Dada una función estrictamente creciente $\alpha \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (es decir, si $n < m$ entonces $\alpha(n) < \alpha(m)$) decimos que la sucesión $(x_{\alpha(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ es una **subsucesión** o **subsecuencia** de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

La manera correcta de pensar en una subsucesión, es como una selección de una cantidad infinita de valores de la sucesión que preserva el orden inicial. A menudo las subsucesiones suelen escribirse de la forma $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ donde se interpreta que $n_k = \alpha(k)$ para alguna función estrictamente creciente $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Ejemplo 2.6.13

Considere $\mathbb{R}$ con la métrica Euclidiana. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por $x_n = (-1)^n$. Sea $(n_k)_{k\geq 0}$ la sucesión de números pares no negativos definida por $n_k = 2k$. Los términos de la subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ toman siempre el valor 1.

Proposición 2.6.14

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio métrico (X, d). $x \in X$ es un punto de acumulación de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si y solamente si existe una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a x.

Demostración. Supongamos que $x \in X$ es un punto de acumulación de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Vamos a construir una secuencia estrictamente creciente $(n_k)_{k\geq 1}$ recursivamente.

Como x es punto de acumulación, para $\varepsilon = 1$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_{n_1}) \leq \varepsilon = 1$. Supongamos que hemos definido n_{k-1}, luego para $\varepsilon = \frac{1}{k}$ y existirá $N > n_{k-1}$ tal que $d(x, N) \leq \varepsilon = \frac{1}{k}$. Definamos $n_k = N$. De este modo la subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ converge a x.

Demostremos la otra dirección. Supongamos que existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a x. Sea $\varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$. Como $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq K$,

$$d(x, x_{n_k}) \leq \varepsilon.$$

Tomando $k \in \mathbb{N}$ tal que $n_k > \max\{N, n_K\}$, tenemos que si definimos $m = n_k$ entonces $m \geq N$ y $d(x, x_m) \leq \varepsilon$. □

Corolario 2.6.15

Si una sucesión converge, entonces todas sus subsucesiones también convergen.

2.7. Espacios métricos completos

Consideremos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio métrico (X, d). La noción de convergencia que estudiamos en la sección anterior requiere conocer cual es el límite de la sucesión. Una pregunta válida es si es posible dar una noción de convergencia equivalente a la anterior pero que no haga referencia explícita al límite.

Veremos que hay una noción que captura la idea anterior, pero que tan solo es equivalente a la noción de convergencia en una clase especial de espacios métricos llamados “completos”, nos referimos a la noción de sucesión de Cauchy.

Definición 2.7.1: Sucesión de Cauchy

Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X es de **Cauchy** si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq N$ entonces

$$d(x_n, x_m) \leq \varepsilon.$$

En otras palabras, para todo valor $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que todos los valores de la secuencia a partir de N están mutuamente a distancia a lo más ε. Notemos que esta noción no hace referencia explícita a un límite, sino que solo dice que asintóticamente los elementos de la sucesión están arbitrariamente cercanos entre sí.

Es claro que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente, entonces también es una sucesión de Cauchy. Sin embargo, existen sucesiones que son de Cauchy y que no son convergentes como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.7.2

Sea $X = \mathbb{Q}$ con la métrica Euclidiana y consideremos la secuencia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde

$$x_n = \frac{\lfloor 10^n\sqrt{2}\rfloor}{10^n}.$$

Es decir, x_n corresponde a $\sqrt{2}$ truncado a los primeros n dígitos luego de la coma. Claramente cada $x_n \in \mathbb{Q}$. Además, si $m > n$ son dos enteros positivos entonces $|x_n - x_m| \leq 10^{-n}$, de donde se deduce que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Sin embargo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge en $\mathbb{Q}$.

El ejemplo anterior da una idea clara de como una secuencia puede ser de Cauchy y no convergente. En cierto modo, el límite si "existe" pero en un espacio métrico más grande. Por ejemplo, el límite anterior existe en $\mathbb{R}$ (es $\sqrt{2}$) pero no en $\mathbb{Q}$.

Proposición 2.7.3: Propiedades de secuencias de Cauchy

Sea (X, d) un espacio métrico y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de Cauchy. Entonces

1. Toda subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.
2. La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, es decir, existe $\bar{x} \in X$ y $R > 0$ tal que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B(\bar{x}, R)$.
3. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite un punto de acumulación, entonces converge.

DEMOSTRACIÓN. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq N$ entonces

$$d(x_n, x_m) \leq \varepsilon.$$

Si $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión, entonces para $\varepsilon > 0$ basta tomar $K \in \mathbb{N}$ tal que $n_K \geq N$ y se tendrá que para todo $k, k' \geq K$ entonces

$$d(x_{n_k}, x_{n_{k'}}) \leq \varepsilon.$$

Luego $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Para demostrar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, tomemos $\varepsilon = 1$. Luego existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq N$ entonces

$$d(x_n, x_m) \leq 1.$$

Consideremos la constante,

$$R = \max\{1, d(x_0, x_N), d(x_1, x_N), \ldots, d(x_{N-1}, x_N)\}.$$

Luego tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ $d(x_n, X_N) \leq R$, luego

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B(X_N, R).$$

Lo cual muestra que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. Finalmente, supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite un punto de acumulación $\bar{x} \in X$, luego existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a $\bar{x}$. En particular, para todo

$\varepsilon > 0$ existe $K \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq K$ entonces

$$d(\bar{x}, x_{n_k}) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otro lado, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq M$ entonces

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Luego, si tomamos $N' = \max\{n_K, M\}$, tenemos que para todo $n' \geq N'$ podemos escoger $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $n_\ell \geq n'$. De ese modo,

$$d(\bar{x}, x_{n'}) \leq d(\bar{x}, x_{n_\ell}) + d(x_{n_\ell}, x_{n'}) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Luego $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\bar{x}$. □

Definición 2.7.4: Espacio métrico completo

Un espacio métrico (X, d) es completo si toda sucesión de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

El Ejemplo 2.7.2 muestra que $\mathbb{Q}$ con la métrica Euclidiana no es un espacio métrico completo. Por otro lado, $\mathbb{R}$ con la métrica Euclidiana sí es una espacio métrico completo como mostraremos en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2.7.5: $\mathbb{R}$ es completo

$\mathbb{R}$ con la métrica Euclidiana es un espacio métrico completo. En efecto, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ es una sucesión de Cauchy, entonces por la Proposición 2.7.3 tenemos que es acotada en $\mathbb{R}$ y por lo tanto, acotada inferiormente. En particular

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} x_n = \lim_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m\geq n} x_m$$

existe. De acá se deduce que existe una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a $\liminf_{n\in\mathbb{N}} x_n$ y por lo tanto, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, tenemos que converge a $\liminf_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

Ejercicio 2.7.6

Muestre que un conjunto X dotado de la métrica discreta forma un espacio métrico (X, d) completo.

Ejercicio 2.7.7

Considere el conjunto $C([0,1], \mathbb{R})$ de funciones continuas $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ con la métrica dada por

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x.$$

1. Pruebe que d_1 es efectivamente una métrica en $C([0,1], \mathbb{R})$.
2. Muestre que el espacio $(C([0,1], \mathbb{R}), d_1)$ no es completo.

Ejercicio 2.7.8: Teorema del punto fijo de Banach

Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $f\colon X \to X$ una función. Se dice que f es contractiva si existe $K \in (0, 1)$ tal que para todo $x, y \in X$,

$$d(f(x), f(y)) \leq K d(x, y).$$

El objetivo de este problema, es mostrar que toda función f contractiva admite un único punto fijo, es decir, un elemento $\bar{x} \in X$ tal que $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

1. Muestre que si una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X converge a $\bar{x} \in X$, entonces la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(\bar{x})$.
2. Pruebe que para todo $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene que
$$d(f^{n+1}(x), f^n(x)) \leq K^n d(f(x), x).$$
3. Muestre que para todo $x \in X$, la sucesión $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.
4. Por el punto anterior, la sucesión $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un elemento $\bar{y} \in X$. Muestre que $\bar{y}$ es punto fijo de f.
5. Muestre que la función f admite un único punto fijo.

La completitud es una propiedad muy útil, ya que en un espacio métrico completo, para demostrar que una sucesión converge no se necesita conocer su límite, sino tan solo demostrar que es de Cauchy. A continuación veremos dos aplicaciones famosas de la completitud.

Se dice que una secuencia de conjuntos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es **encajonada** si $A_{n+1} \subseteq A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

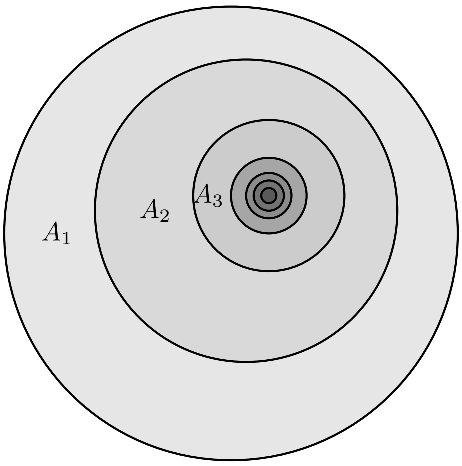


FIGURA 3. Esquema representando una secuencia de conjuntos encajonados

Teorema 2.7.9: Teorema de la intersección de Cantor

Sea (X, d) un espacio métrico. Las afirmaciones siguientes son equivalentes.

1. (X, d) es completo.
2. Toda secuencia encajonada $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos cerrados no vacíos tal que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$ tiene intersección no vacía.
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing.$$

3. Toda secuencia $(B(x_n, R_n))_{n\in\mathbb{N}}$ de bolas cerradas encajonadas tal que $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ tiene intersección no vacía.

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, R_n) \neq \varnothing.$$

Demostración. Probemos que (1) implica (2). Supongamos que (X, d) es completo y sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia encajonada de cerrados cuyo diámetro converge a 0. Para cada $n \in \mathbb{N}$, elegimos un punto $x_n \in F_n$. Afirmamos que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ como $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{diam}(F_n) \leq \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Luego si $m > n \geq N$, como la secuencia $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es encajonada, tenemos que $x_n, x_m \in F_m$ y luego

$$d(x_n, x_m) \leq \operatorname{diam}(F_m) \leq \varepsilon.$$

Por lo tanto $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Como el espacio es completo, tenemos que converge a un valor $\bar{x} \in X$. Probemos que $\bar{x} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$.

En efecto, como los conjuntos son encajonados, la secuencia $(x_n)_{n\geq m} \subseteq F_m$, luego como F_m es cerrado tenemos que $\bar{x} \in F_m$. Como esto es cierto para todo $m \in \mathbb{N}$ obtenemos que

$$\bar{x} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n.$$

Obviamente (2) implica (3), ya que una secuencia de bolas cerradas encajonadas cuyo radio converge a 0 es un caso especial de una secuencia de cerrados encajonados cuyo diámetro converge a 0.

Supongamos (3) y probemos (1). Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de Cauchy y consideremos la siguiente subsucesión: para $n \in \mathbb{N}$ tomamos $k_n \geq 0$ tal que para todo $m, \ell \geq k_n$ se tiene $d(x_m, x_\ell) \leq \frac{1}{2^{n+1}}$. Observe que siempre es posible escoger $k_{n+1} > k_n$. De este modo la secuencia de bolas $(B(x_{k_n}, \frac{1}{2^n}))_{n\geq 0}$ es encajonada y la secuencia de sus radios converge a 0. Por hipótesis, existe $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(x_{k_n}, \frac{1}{2^n})$. Luego la subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge. Por la Proposición 2.7.3 esto implica que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Luego (X, d) es completo. □

Observación 2.18. Notemos que si (X, d) es un espacio métrico y $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una secuencia de conjuntos tales que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$ tiene intersección no vacía, entonces la intersección contiene un único punto. En efecto, si $\bar{x}, \bar{y}$ son elementos distintos de la intersección, entonces $d(\bar{x}, \bar{y}) > 0$. Luego para todo $n \in \mathbb{N}$ tendríamos que $\operatorname{diam}(F_n) \geq d(\bar{x}, \bar{y}) > 0$ por lo cual no podría converger a 0.

Ejemplo 2.7.10

La condición de que el diámetro de los conjuntos converja a 0 en el teorema de intersección de Cantor es importante. En efecto, si consideramos $\mathbb{R}$ con la métrica Euclidiana, la secuencia de cerrados dada por $F_n = [n, +\infty)$ para $n \in \mathbb{N}$ cumple el resto de las hipótesis pero tiene intersección vacía.

Ejercicio 2.7.11

Sea $\mathbb{Q}$ con la métrica Euclidiana. Construya una secuencia de cerrados no vacíos encajonados cuyo diámetro converja a 0 pero cuya intersección sea vacía.

A continuación demostraremos un teorema que será muy útil en el Capítulo 4 y que depende fuertemente de la completitud del espacio. Hablamos del teorema de categorías de Baire que permite describir las intersecciones numerables de conjuntos densos. Este teorema es válido en un contexto más general que el de espacios métricos y permite definir una "cateogoría" de espacios que tienen el comportamiento descrito en el teorema.

Daremos una prueba del teorema de Baire en el caso de un espacio métrico completo. Una prueba en un caso más general puede encontrarse en (Teorema 2.1 de [Bre10])

Teorema 2.7.12: Baire

Sea (X, d) un espacio métrico completo no vacío y sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos densos y abiertos. Definamos

$$D = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Entonces D es un conjunto denso, en particular $D \neq \varnothing$.

Demostración. Sea U un conjunto abierto no vacío, luego existe $x_0 \in U$, un radio $\rho_0 > 0$ y una bola cerrada

$$B(x_0, \rho_0) \subseteq U.$$

Inductivamente, para $n \geq 1$, podemos encontrar $x_n \in B^\circ(x_{n-1}, \rho_{n-1})$ y $\rho_n > 0$ tales que $\rho_n \leq \frac{\rho_{n-1}}{2}$ y

$$B(x_n, \rho_n) \subseteq B^\circ(x_{n-1}, \rho_{n-1}) \cap A_n.$$

Como la secuencia $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0, es claro que la secuencia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Como X es completo, ésta converge a un punto $\bar{x} \in X$.

Sea $N \in \mathbb{N}$ arbitrario. Como para todo $n \geq N$, tenemos que $x_n \in B^\circ(x_N, \rho_N)$, obtenemos que $\bar{x} \in B(x_N, \rho_N)$ para todo $N \in \mathbb{N}$. En consecuencia $\bar{x} \in A_N$, por lo tanto

$$\bar{x} \in A = \bigcap_{n\geq 1} A_n.$$

Además $\bar{x} \in U$. Como U es arbitrario, se sigue que todo abierto intersecta A, luego A es un conjunto denso □

El teorema de Baire a menudo se utiliza tomando complementos de la forma siguiente

Corolario 2.7.13: Baire (segunda forma)

Sea (X, d) un espacio métrico completo no vacío y supongamos que existe una sucesión de conjuntos cerrados $(E_n)_{n\geq 1}$ tal que

$$X = \bigcup_{n\geq 1} E_n.$$

Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{Int}(E_n) \neq \varnothing$.

Demostración. Supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{Int}(E_n) = \varnothing$. Luego $A_n = X \setminus E_n$ es un abierto denso. Por el teorema de Baire tenemos que $D = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es no vacío, Como

$$D = X \setminus \bigcup_{n\geq 1} E_n$$

esto contradice la hipótesis. Obtenemos que existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{Int}(E_n) \neq \varnothing$. □

Ejercicio 2.7.14

Sea $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una colección numerable de rectas en $\mathbb{R}^2$ de la forma

$$L_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a_n x + b_n y = 0\} \text{ para } (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Muestre que el conjunto

$$\mathcal{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n,$$

no puede ser igual a $\mathbb{R}^2$.

Indicación: Muestre que cada recta es un cerrado de interior vacío y aplique el teorema de Baire.

Ejercicio 2.7.15: (difícil)

Considere a $\mathbb{R}$ con la métrica Euclidiana y sea $I = [a,b]$ un intervalo cerrado. Muestre que no es posible escribir

$$I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n,$$

donde $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una colección numerable de intervalos cerrados no vacíos disjuntos a pares.

Indicación: Separe cada intervalo J_n en su interior y frontera y aplique el teorema de categorías de Baire en su segunda forma.

Más adelante en el apunte mostraremos que todo espacio métrico puede ser visto como un subconjunto denso de otro espacio métrico que es completo. (ver Teorema 3.6.1). Para ello requeriremos antes estudiar la noción de continuidad y de isometrías entre espacios métricos.

Ejercicio 2.7.16

Considere los números reales $\mathbb{R}$ y la función $d\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ dada por

$$d(x,y) = |\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-y}|.$$

1. Muestre que d es una métrica.
2. Dado $x \in \mathbb{R}$ y $R > 0$ calcule una expresión para las bolas cerradas $B(x,R)$ y las bolas abiertas $\overset{\circ}{B}(x,R)$.
3. Muestre que los abiertos de $\mathbb{R}$ con ésta métrica coinciden con los abiertos de $\mathbb{R}$ en la métrica Euclidiana. Es decir, que son métricas equivalentes.
4. Muestre que el espacio $(\mathbb{R}, d)$ no es completo.

Nota: Este ejercicio tiene como consecuencia que la propiedad de que un espacio sea completo depende de la métrica. No es una propiedad topológica.

2.8. Espacios métricos compactos

En esta sección estudiaremos una clase de espacios métricos en los que cualquier sucesión admite puntos de acumulación. En particular, los espacios pertenecientes a esta clase serán completos.

Antes de dar la definición de espacio métrico compacto, debemos introducir la noción de recubrimiento de un conjunto por abiertos.

Definición 2.8.1: Recubrimiento

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subseteq X$. Una familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de X es un **recubrimiento** de A si

$$A \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i.$$

Un **subrecubrimiento** de $\{A_i\}_{i\in I}$ es una subcolección $\{A_j\}_{j\in J}$ de $\{A_i\}_{i\in I}$ $(J \subseteq I)$ tal que $\{A_j\}_{j\in J}$ es también un recubrimiento de A.
Se dice que el recubrimiento $\{A_i\}_{i\in I}$ es **finito** si $|I| < \infty$, y se dice que el recubrimiento $\{A_i\}_{i\in I}$ es **abierto** si cada A_i es abierto.

Ejemplo 2.8.2

Consideremos $\mathbb{R}$ con la métrica Euclidiana. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ definimos

$$A_n = (n-1, n+1).$$

La colección de conjuntos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es un recubrimiento abierto de $\mathbb{R}$, pues $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ y cada A_n es abierto. Este recubrimiento no posee subrecubrimientos propios (distintos del recubrimiento inicial), pues si sacamos el intervalo $(m-1, m+1)$ de la colección, la colección resultante ya no recubre $\mathbb{R}$ ya que m queda sin cubrir.

Definición 2.8.3: Conjunto compacto

Un subconjunto K de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es **compacto** si todo recubrimiento abierto de K posee un subrecubrimiento finito.

Se dice que también que un conjunto A es **relativamente compacto** si $\overline{A}$ es compacto. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice compacto si X es un subconjunto compacto en esa topología.

Observación 2.19. De acuerdo al Ejemplo 2.8.2, $\mathbb{R}$ con la métrica Euclidiana no es compacto.

Ejercicio 2.8.4

Sea X un conjunto dotado de la métrica discreta. Muestre que $K \subseteq X$ es compacto si y solamente si K es finito.

Ejercicio 2.8.5

Muestre que todo espacio métrico compacto es separable. Para ello considere recubrimientos del espacio por bolas de radio $\frac{1}{n}$ para $n \in \mathbb{N}$ y utilice que una unión numerable de conjuntos finitos es numerable.

A continuación probaremos algunas propiedades de los conjuntos compactos.

Proposición 2.8.6: Propiedades de compactos

Sea (X,d) un espacio métrico y $K \subseteq X$ un subconjunto compacto. Entonces se tiene lo siguiente

1. K es cerrado.
2. K es acotado.
3. Si $F \subseteq K$ es cerrado, entonces F es compacto.

Demostración. Probemos (1). Para ello basta mostrar que $X \setminus K$ es abierto. si $K = X$ el resultado es inmediato, supongamos $X \setminus K \neq \varnothing$ y sea $y \in X \setminus K$ un punto arbitrario. Para cada $x \in K$, definimos $\delta_x = d(x,y)$. Como $x \neq y$, tenemos que $\delta_x > 0$ para todo $x \in K$. Luego, $\{B^\circ(x, \frac{\delta_x}{3})\}_{x \in K}$ es un recubrimiento abierto de K.

Como K es compacto, existe $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, \ldots, x_n \in K$ tales que $\left\{B^\circ\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{3}\right)\right\}_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ es también un recubrimiento abierto de K.

Consideremos el conjunto $U = \bigcap_{i=1}^n B^\circ\left(y, \frac{\delta_{x_i}}{3}\right)$. El conjunto U es un abierto que contiene a y. Además, si $x \in K$ entonces existe $1 \leq i \leq n$ tal que $x \in B^\circ\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{3}\right)$. Luego

$$\delta_{x_i} = d(y, x_i) \leq d(y,x) + d(x, x_i),$$

esto implica que $d(x,y) \geq 2\frac{\delta_{x_i}}{3} > \frac{\delta_{x_i}}{3}$, lo que muestra que $x \notin U$. Como esto es válido para todo $x \in K$, deducimos que $U \subseteq X \setminus K$. Como $y \in X \setminus K$ es arbitrario, esto muestra que $X \setminus K$ es abierto.

Probemos (2). Nuevamente si K es vacío el resultado es trivial. Supongamos que $K \neq \varnothing$. La colección $\{B^\circ(x,1)\}_{x \in K}$ es un recubrimiento de K, luego existen $x_1, \ldots, x_n \in K$ tales que

$$K = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, 1).$$

Definamos $R = 2 + \max_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} d(x_i, x_j)$. Tenemos que si $x, y \in K$, entonces existen $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tales que $d(x, x_i) \leq 1$ y $d(y, x_j) \leq 1$. Luego

$$d(x,y) \leq d(x,x_i) + d(x_i,x_j) + d(x_j,y) \leq 2 + d(x_i,x_j) \leq R.$$

Luego, si $x_0 \in K$, tenemos que $K \subseteq B(x_0, R)$.

Probemos (3). Sea $F \subseteq K$ un conjunto cerrado. Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de F. Observe que $\{X \setminus F\} \cup \{U_i\}_{i \in I}$ es un recubrimiento abierto de K. Como K es compacto, existe un subrecubrimiento finito $\{X \setminus F\} \cup \{U_j\}_{j \in J}$ de K. Esto implica que $\{U_j\}_{j \in J}$ es un subrecubrimiento finito de F. Luego F es compacto. □

Observación 2.20. En el caso de un espacio topológico arbitrario, no es verdad que los conjuntos compactos sean cerrados. Por ejemplo, si $X = \{a,b\}$ y $\mathcal{T} = \{\varnothing, \{a\}, X\}$ entonces $K = \{a\}$ es compacto (todo recubrimiento de abiertos admite un subrecubrimiento finito) pero no es cerrado pues $X \setminus K = \{b\}$ no es abierto. Sin embargo, si el espacio topológico es de Hausdorff, entonces si es cierto que todo conjunto compacto es cerrado.

Ejemplo 2.8.7

Consideremos $X = \mathbb{R}$ con la métrica discreta. Entonces X es un conjunto cerrado y acotado pero no es compacto, ya que el recubrimiento abierto $\{\{x\}\}_{x \in \mathbb{R}}$ no admite subrecubrimientos finitos (si se saca algún abierto, ya no recubre). Luego no es verdad que los conjuntos cerrados y acotados sean compactos.

Proposición 2.8.8

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Tenemos que $K \subseteq X$ es compacto si y solo si para toda colección $\{F_i\}_{i\in I}$ de cerrados con $F_i \subseteq K$ tales que

$$\bigcap_{i\in I} F_i = \varnothing,$$

existe $n \in \mathbb{N}$ y $F_1, \ldots, F_n \in \{F_i\}_{i\in I}$, tales que

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_i = \varnothing.$$

Demostración. Supongamos que K es compacto. Sea $\{F_i\}_{i\in I}$ una colección de cerrados en K tales que $\bigcap_{i\in I} F_i = \varnothing$. Esto implica que $K \subseteq \bigcup_{i\in I} X \setminus F_i$ y por lo tanto $\{X \setminus F_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de K. Por compacidad de K, existe $n \in \mathbb{N}$ y $X \setminus F_{i_1}, \ldots, X \setminus F_{i_n} \in \{X \setminus F_i\}_{i\in I}$, tales que $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} X \setminus F_{i_j}$. Tomando complementos obtenemos que $X \setminus K \supseteq \bigcap_{j=1}^{n} F_{i_j}$. Como cada F_i está contenido en K, esto muestra que $\bigcap_{j=1}^{n} F_{i_j} = \varnothing$.

Supongamos que $K \subset X$ satisface la propiedad del enunciado, y sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de K. Esto implica que $\{K \setminus U_i\}_{i\in I}$ es una colección de cerrados tales que $\bigcap_{i\in I} K \setminus U_i = \varnothing$. Luego, existe $n \in \mathbb{N}$ y $U_{i_1}, \ldots, U_{i_n} \in \{U_i\}_{i\in I}$, tales que

$$\bigcap_{j=1}^{n} K \setminus U_{i_j} = \varnothing.$$

De ahí se deduce que $\bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j} \supseteq K$. Luego K es compacto. □

La propiedad anterior se suele conocer como **propiedad de intersecciones finitas**. Usualmente se utiliza el converso, es decir, si tengo un conjunto compacto y una colección de conjuntos cerrados tales que la intersección de cada subcolección finita es no vacía, entonces la intersección de todos ellos es no vacía.

Ejercicio 2.8.9

Utilice la proposición anterior para demostrar que si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico compacto y $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de cerrados encajonados de intersección vacía, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $F_k = \varnothing$.

Ejercicio 2.8.10

Sea (X, d) un espacio métrico y considere $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos compactos encajonados. Suponga que $A \subseteq X$ es un conjunto abierto tal que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \subseteq A.$$

1. Muestre que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $K_n \subseteq A$ (atención al caso donde $A = \varnothing$!).
2. Muestre con un contraejemplo que el resultado anterior es falso si $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ consiste en conjuntos cerrados (no necesariamente compactos).

Ejercicio 2.8.11

Sea (X, d) un espacio métrico.

1. Muestre que si toda bola cerrada en (X, d) es compacta, entonces X es completo.
2. Muestre que el converso es falso, es decir, que hay espacios métricos completos donde hay bolas cerradas que no son compactas.

Corolario 2.8.12

Todo espacio métrico compacto es completo.

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Por el Ejercicio 2.8.9, si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de cerrados encajonados no vacíos, entonces su intersección es no vacía. Por el Teorema 2.7.9 obtenemos que X es completo. $\square$

2.9. Espacios secuencialmente compactos

A continuación caracterizaremos los espacios métricos compactos mediante sucesiones. Para ello, daremos la siguiente definición.

Definición 2.9.1: Conjunto secuencialmente compacto

Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que $K \subseteq X$ es **secuencialmente compacto** si toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con valores en K admite un punto de acumulación.

Diremos que un espacio (X, d) es secuencialmente compacto si X es un conjunto secuencialmente compacto.

Mostraremos que en un espacio métrico un conjunto es compacto si y solamente si es secuencialmente compacto. Para ello deberemos introducir la noción de número de Lebesgue de un recubrimiento y probar un par de lemas.

Definición 2.9.2: número de Lebesgue

Sea (X, d) un espacio métrico y $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de un conjunto $K \subseteq X$. Decimos que δ es un **número de Lebesgue** de $\{U_i\}_{i\in I}$ si para todo $x \in K$ existe $i \in I$ tal que $B(x, \delta) \subseteq U_i$.

Lema 2.9.3: Existencia del número de Lebesgue

Sea (X, d) un espacio métrico secuencialmente compacto. Entonces todo recubrimiento abierto de X admite un número de Lebesgue.

Demostración. Probaremos este lema por contradicción. Para esto, supongamos que existe un recubrimiento abierto $\{U_i\}_{i\in I}$ de X tal que para todo $\delta > 0$, existe una bola de radio igual a δ que no está contenida en ningún U_i. Luego, para todo $n \geq 1$ existe $x_n \in X$ tal que la bola $B(x_n, \frac{1}{n})$ no está contenida en ningún abierto del recubrimiento. Por hipótesis, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente a un elemento $\bar{x} \in X$. Como $\{U_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento de X, existe $i \in I$ tal que $\bar{x} \in U_i$, y como U_i es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $B^\circ(\bar{x}, \delta) \subseteq U_i$.

Ya que la sucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\bar{x}$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq K$,

$$x_{n_k} \in B^\circ\left(\bar{x}, \frac{\delta}{2}\right) \subseteq U_i.$$

Esto implica que para k suficientemente grande (tal que $\frac{1}{n_k} < \frac{\delta}{2}$), la bola de centro x_{n_k} y radio $\frac{1}{n_k}$ está contenida en U_i, lo cual no puede ocurrir dada la elección de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Definición 2.9.4: Espacio totalmente acotado

Decimos que un espacio métrico (X, d) un conjunto $K \subseteq X$ es **totalmente acotado** si para todo $\delta > 0$, se puede recubrir K con un número finito de bolas abiertas de radio δ y centro en K.

Lema 2.9.5: Los espacios secuencialmente compactos son totalmente acotados

Sea (X, d) un espacio métrico y sea $K \subseteq X$ secuencialmente compacto. Entonces K es totalmente acotado.

Demostración. Si $K = \varnothing$ el resultado es trivial. Supongamos que $K \neq \varnothing$ no es totalmente acotado, luego existe $\delta > 0$ tal que K no puede recubrirse con una cantidad finita de bolas de radio δ con centro en K. Sea $x_0 \in K$, por hipótesis existe $x_1 \in K \setminus B^\circ(x_0, \delta)$. Nuevamente, por hipótesis podemos escoger $x_2 \in K \setminus (B^\circ(x_0, \delta) \cup B^\circ(x_1, \delta))$ y repetimos el procedimiento anterior tomando $x_n \in K \setminus \bigcup_{j=0}^{n-1} B^\circ(x_j, \delta)$. De esta manera, obtenemos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de K tal que $d(x_n, x_m) \geq \delta$, para todo par distinto de $n, m \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente $(x_{n_k})_{k\geq 0}$. Luego, para k suficiente grande, $d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) \leq \frac{\delta}{2}$, lo que contradice la construcción de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Teorema 2.9.6: Teorema de Bolzano-Weierstrass

Sea (X, d) un espacio métrico y $K \subseteq X$. Entonces K es compacto si y solamente si K es secuencialmente compacto.

Demostración. Supongamos que K es compacto y consideremos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de K. Para cada $n \geq 0$ definimos el conjunto

$$F_n = \overline{\{x_k : k \geq n\}}.$$

Notemos que $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una secuencia de conjuntos cerrados, encajonados y no vacíos. Por el Ejercicio 2.8.9, deducimos que existe $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Luego para todo $n \geq 0$, existe $m_n \in \mathbb{N}$ tal que $m_n > m_{n-1}$ y $d(x, x_{m_n}) \leq 1/n$. Luego $(x_{m_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión convergente de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Supongamos ahora que K es secuencialmente compacto. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de K. El Lema 2.9.3 implica que existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in K$, existe $i_x \in I$ tal que $B^\circ(x,\delta) \subseteq U_{i_x}$. El Lema 2.9.5 implica que existen $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, \dots, x_n \in K$ tales que $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n B(x_j,\delta) \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{i_{x_j}}$. Luego, $\{U_{i_{x_j}}\}_{j=1}^n$ es un subrecubrimiento abierto de $\{U_i\}_{i\in I}$, lo que prueba que K es compacto. □

Observación 2.21. El resultado anterior utiliza fuertemente el hecho de que X es un espacio métrico. Las definiciones anteriores se pueden generalizar para espacios topológicos. En ese contexto se puede demostrar que todo espacio topológico secuencialmente compacto es compacto, pero que existen espacios compactos que no son secuencialmente compactos. Por ejemplo el espacio $\{0,1\}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \to \{0,1\}\}$ con la topología donde un conjunto es abierto si se puede escribir como unión de conjuntos de la forma $U_{F,p}$ donde $F \subseteq \mathbb{R}$ es un subconjunto finito, $p\colon F \to \{0,1\}$ y se tiene que

$$U_{F,p} = \{f \in X : f(x) = p(x) \text{ para todo } x \in F.\}$$

Se puede demostrar que $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$ es compacto para esa topología (llamada **topología producto**) pero no secuencialmente compacto.

Observación 2.22. Clásicamente, el teorema de Bolzano-Weierstrass tan solo dice que un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ con la métrica Euclidiana es secuencialmente compacto, si y solamente si es cerrado y acotado. Más adelante veremos el teorema de Heine-Borel (Corolario 2.11.4), que dice que los conjuntos cerrados y acotados de $\mathbb{R}^n$ son compactos. Luego el Teorema 2.9.6 implica el resultado clásico de Bolzano-Weierstrass.

Finalmente, daremos una última caracterización de los conjuntos compactos.

Teorema 2.9.7: Caracterización de compacidad

Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces X es compacto si y solamente si X es completo y totalmente acotado.

Demostración. Supongamos que X es compacto. Ya mostramos en el Corolario 2.8.12 que X es completo. Por el Teorema 2.9.6 X es secuencialmente compacto, luego por el Lema 2.9.5 obtenemos que es totalmente acotado.

Supongamos ahora que X es completo y totalmente acotado. Por el Teorema 2.9.6 basta demostrar que es secuencialmente compacto. Lo haremos mediante un argumento diagonal. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X y para $k \in \mathbb{N}$ definamos $n_{0,k} = k$.

Como X es totalmente acotado, existe una cantidad finita de bolas de radio $\delta_1 = \frac{1}{2}$ que recubren X. Luego existe una de ellas tal que existe un subconjunto infinito

$$\{n_{1,0} < n_{1,1} < n_{1,2} \dots\} \subseteq \{n_{0,k}\}_{k\in\mathbb{N}} = \mathbb{N}$$

tal que $x_{n_{1,k}}$ está en esa bola para todo $k \in \mathbb{N}$. Consideremos la subsucesión $(x_{n_{1,k}})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_{0,k})_{k\in\mathbb{N}}$ y notemos que $\operatorname{diam}(\{x_{n_{1,k}}\}_{k\in\mathbb{N}}) \leq 1$. Sea $m \geq 2$, y supongamos que hemos definido una sucesión $(x_{n_{m-1,k}})_{k\in\mathbb{N}}$. Como X es totalmente acotado, existe una cantidad finita de bolas de radio $\delta_m = \frac{1}{2m}$ que recubren X. Luego existe una de ellas tal que existe un subconjunto infinito

$$\{n_{m,0} < n_{m,1} < n_{m,2} \dots\} \subseteq \{n_{m-1,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$$

tal que $x_{n_{m,k}}$ está en esa bola para todo $k \in \mathbb{N}$. Definimos la subsucesión $(x_{n_{m,k}})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_{n_{m-1,k}})_{k\in\mathbb{N}}$ y notemos que $\operatorname{diam}(\{x_{n_{m,k}}\}_{k\in\mathbb{N}}) \leq \frac{1}{m}$.

Ahora definiremos una sucesión utilizando la diagonal de colección $\{x_{n_{m,k}}\}_{m\geq 1, k\in\mathbb{N}}$ como se muestra en el esquema siguiente:

$$\begin{array}{rccccc}
\{x_{0,k}\}_{k\in\mathbb{N}} = & \boxed{x_{0,0}} & x_{0,1} & x_{0,2} & x_{0,3} & \cdots \\
\{x_{1,k}\}_{k\in\mathbb{N}} = & x_{1,0} & \boxed{x_{1,1}} & x_{1,2} & x_{1,3} & \cdots \\
\{x_{2,k}\}_{k\in\mathbb{N}} = & x_{2,0} & x_{2,1} & \boxed{x_{2,2}} & x_{2,3} & \cdots \\
\{x_{3,k}\}_{k\in\mathbb{N}} = & x_{3,0} & x_{3,1} & x_{3,2} & \boxed{x_{3,3}} & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Es decir, definimos $(x_{k,k})_{k\geq 1}$ y notamos que es una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Además, si $m \in \mathbb{N}$ y $\ell \geq m$ entonces $x_{\ell,\ell} \in \{x_{n_{m,k}}\}_{k\in\mathbb{N}}$, luego para todo $\ell, \ell' \geq m$ tenemos que

$$d(x_{\ell,\ell}, x_{\ell',\ell'}) \leq \frac{1}{m}.$$

De donde se desprende que $(x_{k,k})_{k\geq 1}$ es de Cauchy. Como X es completo concluimos que converge. Por lo tanto X es secuencialmente compacto. □

Corolario 2.9.8: Conjuntos compactos de $\mathbb{R}$

Sean $a \leq b$ números reales. Entonces el intervalo cerrado $[a, b]$ con la métrica Euclidiana es compacto.

Demostración. Como $\mathbb{R}$ es completo, entonces $[a, b]$ también es completo. Es fácil probar que $[a, b]$ es totalmente acotado. Por el Teorema 2.9.7 obtenemos que es compacto. □

Ejercicio 2.9.9: Compacidad de la bola unitaria en espacios vectoriales

Sea E un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$. El objetivo de este problema es mostrar que la bola cerrada de radio 1 y centro 0 es compacta si y solamente si la dimensión de E es finita.

1. Sea F un subespacio vectorial cerrado propio ($F \neq E$) de E. Muestre que existe $x_0 \in E$ tal que $\|x_0\| = 1$ y
$$\|x_0 - y\| \geq \frac{1}{2}, \text{ para todo } y \in F.$$
2. Deduzca del punto anterior que si E no es de dimensión finita, entonces existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de E tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| = 1$ y $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$ para todo $m \in \mathbb{N}$ con $m \neq n$. *Indicación:* Defina iterativamente una secuencia de subespacios cerrados $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de dimensión n, donde x_n se obtiene a partir de F_n usando el punto anterior, y el espacio F_{n+1} es el subespacio generado por F_n y x_n.
3. Concluya que la dimensión de E es finita si y solamente si la bola cerrada de radio 1 y centro 0 es compacta.

2.10. Métricas equivalentes

En esta sección estudiaremos la noción de equivalencia de métricas. Recordemos que toda métrica induce una topología. Si tan solo nos interesamos en las propiedades que dependen de los conjuntos abiertos, como por ejemplo la convergencia de sucesiones (en un espacio topológico Hausdorff), podríamos considerar que dos métricas son “equivalentes” si generan los mismos conjuntos abiertos

Definición 2.10.1: Métricas equivalentes

Sean d_1 y d_2 dos métricas definidas sobre el conjunto X. Se dice que d_1 y d_2 son **métricas equivalentes** si los abiertos de los espacios métricos (X, d_1) y (X, d_2) coinciden.

Ejemplo 2.10.2

Sea $X = \mathbb{R}$, d la métrica Euclidiana y d' la métrica discreta. Los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que contienen solo un elemento son abiertos en $(\mathbb{R}, d')$, pero no lo son en $(\mathbb{R}, d)$. Luego, d y d' no son métricas equivalentes.

Proposición 2.10.3: Caracterización de equivalencia de métricas

Sean d_1 y d_2 dos métricas definidas sobre X. Las métricas d_1 y d_2 son equivalentes si y solo si toda bola abierta de (X, d_1) contiene una bola abierta de (X, d_2), y toda bola abierta de (X, d_2) contiene una bola abierta de (X, d_1).

Demostración. Sea $x \in X$ y $R > 0$. Llamaremos $B_1^\circ(x, R)$ y $B_2^\circ(x, R)$ a las bolas abiertas de centro x y radio R en (X, d_1) y (X, d_2) respectivamente.

Supongamos que d_1 y d_2 son equivalentes. Entonces $B_1^\circ(x, R)$ es un abierto en (X, d_2). Esto implica que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_2^\circ(x, \varepsilon) \subseteq B_1^\circ(x, R)$. De manera análoga, deducimos que existe $\varepsilon' > 0$ tal que $B_1^\circ(x, \varepsilon') \subseteq B_2^\circ(x, R)$.

Supongamos ahora que las bolas abiertas en (X, d_1) contienen bolas abiertas en (X, d_2) y viceversa. Sea $U \subseteq E$ un abierto en (X, d_1). Luego, para todo $x \in U$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_1^\circ(x, \varepsilon) \subseteq U$. Por hipótesis, esto implica que existe $\varepsilon' > 0$ tal que $B_2^\circ(x, \varepsilon') \subseteq B_1^\circ(x, \varepsilon) \subseteq U$. Luego, U es abierto en (X, d_2). De manera análoga se prueba que los abiertos de (X, d_2) son también abiertos de (X, d_1). $\square$

Ejercicio 2.10.4

Sean d_1 y d_2 métricas equivalentes en X.

1. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X. Pruebe que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge con respecto a d_1 si y solo si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge con respecto a d_2.
2. Sea $K \subseteq X$. Pruebe que K es compacto en (X, d_1) si y solo si K es compacto en (X, d_2).

Ejercicio 2.10.5

Sea (X, d) un espacio métrico. Definimos para cada $x, y \in X$

$$\bar{d}(x, y) = \text{mín}\{1, d(x, y)\}.$$

1. Pruebe que $\bar{d}$ es una métrica en X.
2. Pruebe que $\bar{d}$ y d son métricas equivalentes.
3. Es $(X, \bar{d})$ un espacio métrico acotado?

El ejercicio anterior muestra que si bien la equivalencia de normas preserva nociones como la convergencia, no preserva nociones finas de la métrica, tales como los conjuntos acotados. Hay una noción más fuerte que sí preserva los conjuntos acotados llamada **equivalencia fuerte de métricas**.

Definición 2.10.6: Métricas fuertemente equivalentes

Sean d_1 y d_2 dos métricas definidas sobre el conjunto X. Se dice que d_1 y d_2 son **métricas fuertemente equivalentes** si existen constantes $\alpha, \beta > 0$ tales que para todo $x, y \in X$

$$\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y).$$

Ejercicio 2.10.7

Muestre que las métrica del Ejercicio 2.10.5 no son fuertemente equivalentes.

Ejercicio 2.10.8

Sea X un conjunto. Muestre que si d_1, d_2 son métricas fuertemente equivalentes en X entonces $A \subseteq X$ es acotado en (X, d_1) si y solamente si A es acotado en (X, d_2).

Consideremos ahora el caso especial de un espacio vectorial E sobre $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$, con norma $\|\cdot\|$. Recordemos que la métrica definida por la norma $\|\cdot\|$ está dada por

$$d_{\|\cdot\|}(x, y) = \|x - y\|, \text{ para todo } x, y \in E.$$

Definición 2.10.9: Equivalencia de normas

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, y sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ dos normas sobre E. Se dice las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes, si las métricas definidas por estas normas son equivalentes.

Es importante destacar que la equivalencia de normas es una relación de equivalencia en el espacio de todas las normas.

Proposición 2.10.10: Caracterización de la equivalencia de normas

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, y sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ dos normas sobre E. Las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes si y solo si existen constantes $\alpha, \beta > 0$ tales que para todo $x \in E$, $\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1$.

Demostración. Dado $x \in E$ y $R > 0$ llamaremos $B_1^\circ(x,R)$ y $B_2^\circ(x,R)$ a las bolas abiertas de centro x y radio R en $(X, \|\cdot\|_1)$ y $(X, \|\cdot\|_2)$ respectivamente.

Supongamos que las dos normas son equivalentes. Luego, la bola $B_1^\circ(0,1)$ es un abierto en $(E, d_{\|\cdot\|_2})$. Por lo tanto, existe $k_2 > 0$ tal que

$$B_2^\circ(0,k_2) \subseteq B_1^\circ(0,1) \subseteq B_1(0,1).$$

Como la adherencia de $B_2^\circ(0,k_2)$ es igual a $B_2(0,k_2)$, tenemos que

$$B_2(0,k_2) \subseteq B_1(0,1).$$

Esto implica que $B_2(0,R) \subseteq B_1(0,Rk_2)$, para todo $R > 0$. Por lo tanto, para todo $x \in E$ se tiene $\|x\|_1 \leq k_2\|x\|_2$. De igual forma se prueba la otra desigualdad.

Supongamos que existen $k_1, k_2 > 0$ tales que para todo $x \in E$, $\|x\|_2 \leq k_1\|x\|_1$ y $\|x\|_1 \leq k_2\|x\|_2$.

Esto implica que si $\|x\|_2 < \frac{R}{k_2}$, entonces $\|x\|_1 < R$. Luego, $B_2^\circ(0, \frac{R}{k_2}) \subseteq B_1^\circ(0,R)$. como la bola centrada en x y de radio R es una traslación de la misma bola centrada en 0, tenemos que para todo $x \in E$ y $R > 0$,

$$B_2^\circ\left(x, \frac{R}{k_2}\right) \subseteq B_1^\circ(x,R).$$

Esto prueba que toda bola abierta de $(E, d_{\|\cdot\|_1})$ contiene una bola abierta de $(E, d_{\|\cdot\|_2})$. De manera análoga se prueba que toda bola abierta de $(E, d_{\|\cdot\|_2})$ contiene una bola abierta de $(E, d_{\|\cdot\|_1})$, con lo que se tiene la equivalencia de las normas. $\square$

Observación 2.23. Lo anterior nos dice que en el caso de las normas, si las métricas inducidas son equivalentes, entonces son automáticamente fuertemente equivalentes.

Algo particularmente interesante ocurre en el caso de espacios vectoriales normados de dimensión finita, donde todas las normas son equivalentes de manera automática. Referimos al lector al inicio del capítulo 5 para nociones básicas sobre espacios vectoriales.

Teorema 2.10.11: Equivalencia de normas en dimensión finita

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$. Todas las normas sobre E son equivalentes.

Demostración. Procederemos por inducción. Sea $n = \dim(E)$. Si $n = 0$ o $n = 1$ el resultado es trivial. Sea $n > 1$ y supongamos que el resultado es cierto para todo espacio vectorial de dimensión a lo más $n-1$.

Sea $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de E. Para $x \in E$ existe una única escritura en la base, es decir, de la forma $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x)e_i$. Definimos

$$\|x\|_B = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |\lambda_i(x)|.$$

Notemos que $\|\cdot\|_B$ es una norma en E, más aun, es una norma que hace de E un espacio vectorial normado completo. Consideremos otra norma $\|\cdot\|$ en E. Como la equivalencia de normas es relación de equivalencia, basta que probemos que $\|\cdot\|$ es equivalente a $\|\cdot\|_B$.

En efecto, una desigualdad es sencilla. Notemos que para todo $x \in E$

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i(x)| \|e_i\| \leq n \left(\max_{i \in \{1,\ldots,n\}} \|e_i\| \right) \|x\|_B.$$

Para la otra desigualdad, supongamos por contradicción que no existe constante $C \geq 0$ tal que $C\|x\|_B \leq \|x\|$ para todo $x \in E$. eso significa que para todo $k \geq 1$ existe $x_k \in E$ tal que

$$\frac{\|x_k\|_B}{k} > \|x_k\|.$$

Sea para cada $k \geq 1$, sea $i(k) \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\|x_k\| = |\lambda_{i(k)}(x_k)|$. Como hay finitas posibilidades, existe $\bar{i} \in \{1, \ldots, n\}$ tal que la igualdad anterior ocurre para infinitos valores de k. Sin pérdida de generalidad (cambiando el orden en la base) podemos suponer que ocurre para $\bar{i} = n$. Consideremos entonces una subsecuencia $(x_{k_m})_{m \geq 0}$ tal que $i(k_m) = n$ para todo $m \geq 1$.

Defina $y_m = u \frac{x_{k(m)}}{\|x_{k(m)}\|_B}$ con $u \in \{-1, 1\}$ de modo tal que $\lambda_n(y_m) = 1$. De este modo la secuencia $(y_m)_{m \geq 1}$ cumple lo siguiente para todo $m \geq 1$:

1. $\|y_m\|_B = 1$.
2. $\lambda_n(y_m) = 1$.
3. $\|y_m\| < \frac{1}{k(m)} \|y_m\|_B = \frac{1}{k(m)}$.

Por la tercera desigualdad, tenemos que $\|y_m\|$ converge a 0, por lo tanto la secuencia $(y_m)_{m \geq 1}$ converge a 0. Notemos que si defino $w_m = y_m - e_n$, entonces w_m pertenece al subespacio vectorial V generado por $b_1, \ldots, b_{n-1}$. De acá obtenemos que

$$\|w_i - w_j\| - \|(w_i + e_n) - (w_j + e_n)\| \leq \|y_i\| + \|y_j\| \leq \frac{2}{\min\{k(i), k(j)\}}.$$

De donde se obtiene que la secuencia $(w_m)_{m \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy con respecto a la norma $\|\cdot\|$ restringida a V.

Como $\dim(V) = n - 1$, por inducción sabemos que la restricción de $\|\cdot\|_B$ a V y de $\|\cdot\|$ a V son equivalentes. Luego existe $D \geq 0$ tal que para todo $v \in V$, $\|v\| \leq D\|v\|_B$. De acá obtenemos que la secuencia $(w_m)_{m \in \mathbb{N}}$ es también de Cauchy con respecto a la norma $\|\cdot\|_B$ restringida a V.

Como V es completo con la restricción de $\|\cdot\|_B$, obtenemos que la secuencia $(w_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge con respecto a esa norma. Es decir, existe $w \in V$ tal que $\|w_m - w\|_B$ converge a 0 cuando $m \to \infty$. De acá obtenemos que

$$\lim_{m \to \infty} \|w_m - w\| \leq \lim_{m \to \infty} D\|w_m - w\|_B = 0.$$

Luego $(w_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge también a w con respecto a la norma $\|\cdot\|$. De lo anterior se obtiene que

$$\|w + e_n\| = \|w - w_j + w_j + e_n\| \leq \|w - w_j\| + \|w_j + e_n\|.$$

Como el lado derecho converge a 0, obtenemos que $w = -e_n$, lo cual no puede ocurrir pues $w \in V$ y $e_n \notin V$. Esto genera una contradicción. $\square$

Observación 2.24. La prueba anterior sigue siendo válida en cualquier espacio vectorial normado sobre un cuerpo con una valuación que lo haga completo. En particular es válido para espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$.

Ejercicio 2.10.12

Complete la prueba anterior. Sea $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de un espacio vectorial E sobre $\mathbb{R}$. Para $x \in E$ existe una única escritura en la base, es decir, de la forma $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) e_i$. Definimos

$$\|x\|_B = \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} |\lambda_i(x)|.$$

Pruebe que $\|\cdot\|_B$ es una norma en E, más aun, es una norma que hace de E un espacio vectorial normado completo.

2.11. Productos de espacios métricos

Sea $n \geq 1$ un entero positivo y sean $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ espacios métricos. Consideremos el producto cartesiano

$$X = \prod_{j=1}^{n} X_j = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_j \in X_j, \text{ para todo } 1 \leq j \leq n\}.$$

Para $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ en X, se definen las funciones

$$\begin{aligned}
\delta_\infty(x, y) &= \max\{d_1(x_1, y_1), \ldots, d_n(x_n, y_n)\} \\
\delta_2(x, y) &= \sqrt{(d_1(x_1, x_2))^2 + \cdots + (d_n(x_n, y_n))^2} \\
\delta_1(x, y) &= d_1(x_1, y_1) + \cdots + d_n(x_n, y_n).
\end{aligned}$$

Ejercicio 2.11.1

Sea $n \geq 1$ un entero positivo y sean $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ espacios métricos y $X = \prod_{j=1}^{n} X_j$ su producto cartesiano. Pruebe que

1. δ_1, δ_2 y δ_∞ son métricas en X.
2. Las métricas δ_1, δ_2 y δ_∞ son equivalentes.

Ejercicio 2.11.2

Suponga que $X_j = \mathbb{R}$ y que d_j es la métrica Euclidiana en $\mathbb{R}$, para todo $1 \leq j \leq n$. Qué espacios métricos se obtienen en este caso con las métricas δ_1, δ_2 y δ_∞?

Proposición 2.11.3: Producto finito de compactos es compacto

Para cada $1 \leq j \leq n$, sea (X_j, d_j) un espacio métrico y $A_j \subseteq X_j$ un compacto. Considere el conjunto

$$A = \prod_{j=1}^{n} A_j = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_j \in A_j, \text{ para todo } 1 \leq j \leq n\}.$$

Entonces A es compacto en X respecto a cualquiera de las métricas $\delta_1, \delta_2, \delta_\infty$.

Demostración. Dado que dos métricas equivalentes admiten los mismos conjuntos compactos, basta probar el resultado para δ_1.

Procedamos por inducción. Si $n = 1$ el resultado es trivial. Supongamos que el resultado es válido para $n-1$, luego $\prod_{j=1}^{n=1} A_j$ es compacto para la métrica δ_1.

Sea $\{(x_1^k, \ldots, x_n^k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de A. Por hipótesis inductiva, $\prod_{j=1}^{n=1} A_j$ es compacto y luego existe una subsucesión $\{(x_1^{k_\ell}, \ldots, x_{n-1}^{k_\ell})\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ de $\{(x_1^k, \ldots, x_{n-1}^k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente a algún $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1}) \in \prod_{j=1}^{n=1} A_j$. Por otro lado, la compacidad de A_n asegura que $(x_n^{k_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ también posee una subsucesión convergente. Luego, podemos escoger $\{m_0 < m_1 < \ldots\} \subseteq \{k_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ de manera que

$$\{(x_1^{m_\ell}, \ldots, x_{n-1}^{m_\ell})\}_{\ell\in\mathbb{N}} \text{ converge a algún } (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1}) \text{ en } \prod_{j=1}^{n=1} A_j,$$

$$\{x_n^{m_\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}} \text{ converge a algún } \bar{x}_n \text{ en } A_n,$$

De aquí se deduce fácilmente que $\{(x_1^{m_\ell}, \ldots, x_n^{m_\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ converge a $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ en A con respecto a la métrica δ_1. $\square$

Un corolario del resultado anterior es el teorema de Heine-Borel que caracteriza los conjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$ con respecto a la métrica Euclidiana (o alguna métrica equivalente)

Corolario 2.11.4: Heine-Borel

Sea $n \in \mathbb{N}$ y consideremos $\mathbb{R}^n$ con la métrica Euclidiana. Un conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto si y solamente si es cerrado y acotado.

Demostración. Para cada $1 \leq j \leq n$, sean $a_j \leq b_j$ en $\mathbb{R}$. Considere el conjunto

$$I = \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j] \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Por el Corolario 2.9.8, tenemos que para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ el intervalo $[a_j, b_j]$ es compacto. Luego por la Proposición 2.11.3 y el hecho que $\delta_2 = d_2$ en $\mathbb{R}^n$, obtenemos que I es compacto.

Ya sabemos que los compactos son cerrados y acotados. Si K es un cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$, entonces existe un conjunto I como arriba tal que $K \subseteq I$. Como los subconjuntos cerrados de un compacto son compactos, concluimos que K es compacto. $\square$

Uno podría preguntarse que pasa con un producto infinito de espacios métricos compactos. En este caso no es siempre posible definir una métrica en el producto, pero sí se puede definir una topología llamada topología producto.

Sea $\{(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}\}$ una colección de espacios métricos compactos. La **topología producto** en $\prod_{i\in I} X_i$ es la generada por la base de abiertos $U_{F,V}$ donde F es un subconjunto finito de I, y

$$V = (V_i)_{i\in F}$$

es una función que a cada $i \in F$ asigna un abierto V_i de la topología $\mathcal{T}_i$ y

$$U_{F,V} = \{x \in \prod_{i\in I} X_i : \text{ para todo } i \in F, x_i \in V_i\}.$$

Ejercicio 2.11.5

En el caso de un producto finito de espacio métricos, muestre que la topología producto coincide con la topología generada por alguna de las métricas δ_1, δ_2 o δ_∞. Luego es metrizable.

Se puede demostrar que con la topología producto el espacio $\prod_{i\in I} X_i$ es compacto, pero este es un resultado no trivial que depende de un enunciado un poco más débil que el axioma de elección (ver Definición A.1.2 para una hacerse una idea de que significa esto). Este resultado se denomina teorema de Tychonoff. Una demostración puede encontrarse en [Dug66] (Teorema 1.4, pag 224).

2.12. Dimensión topológica

A un espacio vectorial se le puede asociar una noción de dimensión que corresponde al cardinal de una de sus bases. Es interesante preguntarse si existe una noción de dimensión que tenga validez para espacios métricos, o más generalmente para espacios topológicos. En esta sección estudiaremos una noción específica de dimensión que se le puede asociar a un espacio topológico, y que tiene la propiedad que $\mathbb{R}^n$ con la métrica Euclidiana tiene dimensión n. Más adelante mostraremos también que esta noción es invariante bajo isomorfismos entre espacios métricos.

Para introducir ésta noción debemos trabajar un poco más la noción de recubrimiento.

Definición 2.12.1: Refinamiento de una colección de conjuntos

Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ una colección de conjuntos. Decimos que otra colección de conjuntos $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j\in J}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$ si para todo $j \in J$ existe $i \in I$ tal que $V_j \subset U_i$.

En otras palabras, $\mathcal{V}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$ si todo conjunto de $\mathcal{V}$ está contenido en algún conjunto de $\mathcal{U}$.

Ejemplo 2.12.2

Consideremos $\mathcal{U} = \{[0,2][1,3],[2,4]\}$. Entonces $\mathcal{V} = \{[0,1],[1,2],[2,3],[3,4]\}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$.

Definición 2.12.3: Orden de un recubrimiento

Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico, y $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de X. El orden $\mathrm{ord}(\mathcal{U})$ del recubrimiento $\mathcal{U}$ es el mínimo entero no negativo m tal que cada $x \in X$ pertenece a lo sumo a m conjuntos de $\mathcal{U}$.

$$\mathrm{ord}(\mathcal{U}) = \sup_{x\in X} |\{i \in I : x \in U_i\}|.$$

Si tal número no existe, diremos que el orden del recubrimiento es $+\infty$.

De manera equivalente, el orden de un recubrimiento $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ es el mínimo $m \in \mathbb{N}$ tal que para toda tupla de índices $i_1,\ldots,i_{m+1}$ distintos se tiene que

$$U_{i_1} \cap \mathcal{U}_{i_2} \cap \cdots \cap \mathcal{U}_{i_{m+1}} = \varnothing.$$

Es decir, ningún punto pertenece simultáneamente a $m+1$ conjuntos distintos.

Ejemplo 2.12.4

Consideremos $\mathcal{U} = \{[0,2][1,3],[2,4]\}$. Entonces $\mathcal{V} = \{[0,1],[1,2],[2,3],[3,4]\}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$.

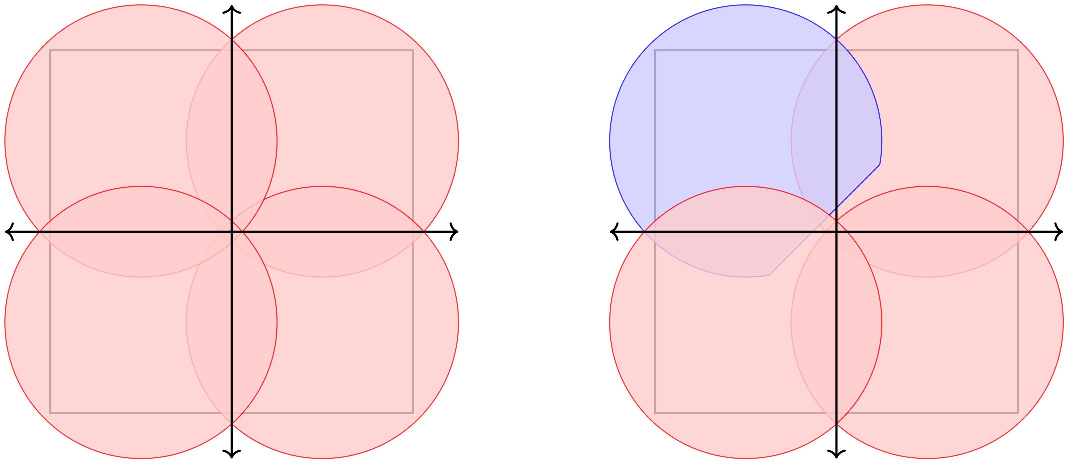


FIGURA 4. El recubrimiento del cuadrado de la izquierda tiene orden 4 ya que el origen pertenece a todos los conjuntos. En la derecha vemos un refinamiento de éste con orden 3.

Definición 2.12.5: Dimensión topológica

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Su **dimensión topológica** o **Dimensión de cubrimientos de Lebesgue** $\dim(X, \mathcal{T})$ es el mínimo entero n tal que todo recubrimiento finito abierto $\mathcal{U}$ de X admite un refinamiento abierto finito de orden a lo más $n + 1$.
Si tal número n no existe, diremos que la dimensión topológica de X es infinita.

Ejercicio 2.12.6

Muestre que un espacio topológico tiene dimensión 0 si y solamente si todo recubrimiento finito abierto admite un subrecubrimiento finito por conjuntos abiertos disjuntos a pares.

Ejercicio 2.12.7

Sea $C \subseteq [0, 1]$ el conjunto de Cantor definido en el Ejercicio 2.5.16. Muestre que $\dim(C) = 0$.

Capítulo 3

Continuidad en espacios métricos

El objetivo de este capítulo es extender la noción de función continua que conocemos para funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a funciones entre dos espacios métricos arbitrarios. Estudiaremos varias definiciones equivalentes de continuidad y sus relaciones con las propiedades topológicas del espacio.

3.1. Funciones continuas

Definición 3.1.1: Continuidad

Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos. Una función $f\colon X \to Y$ es **continua en $\mathbf{x_0}$** $\in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ tal que $d_X(x, x_0) \leq \delta$, entonces

$$d_Y(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon.$$

Se dice que f es **continua** si es continua en todo $x_0 \in X$.

En términos formales, $f\colon X \to Y$ es continua en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X[d_X(x, x_0) \leq \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon].$$

También puede serle útil considerar la negación de la continuidad. Una función $f\colon X \to Y$ **no es continua** en $x_0 \in X$ si existe un valor $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ se puede encontrar x_δ tal que $d_X(x_\delta, x_0) \leq \delta$ pero $d_Y(f(x_\delta), f(x_0)) > \varepsilon$. Es decir,

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x_\delta \in X[d_X(x_\delta, x_0) \leq \delta \wedge d_Y(f(x_\delta), f(x_0)) > \varepsilon].$$

Observación 3.1. Sea (X, d) un espacio métrico. Si decimos que una función $f\colon X \to \mathbb{R}$ es continua, estaremos considerando a $\mathbb{R}$ equipado con la métrica euclidiana (a menos que se diga otra cosa). En este caso, f es continua en $x \in \mathbb{R}$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, y) \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Proposición 3.1.2

Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$ un subconjunto no vacío. Definimos la distancia al conjunto A como una función $f\colon X \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

Entonces la función f es continua.

Demostración. En efecto, sean $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$. Por definición de ínfimo, existe $y \in A$ tal que

$$d(x_0, y) \leq d(x_0, A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Para $z \in B(x, \delta)$ tenemos que

$$f(z) = d(z, A) \leq d(z, y) \leq d(z, x_0) + d(x_0, y) \leq \varepsilon + d(x_0, A),$$

lo que implica

$$f(z) - f(x_0) \leq \varepsilon. \tag{3.1}$$

Por otro lado, aplicando la definición de ínfimo a $d(z, A)$, tenemos que existe $y \in A$ tal que

$$d(z, y) \leq d(z, A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

De esta forma obtenemos que

$$f(x_0) = d(x_0, A) \leq d(x_0, y) \leq d(x_0, z) + d(z, y) \leq \varepsilon + d(z, A),$$

lo que implica

$$f(x_0) - f(z) \leq \varepsilon. \tag{3.2}$$

De (3.1) y (3.2) deducimos que $|f(z) - f(x)| \leq \varepsilon$. □

Ejercicio 3.1.3

Sean (X_1, d_1), (X_2, d_2) y (X_3, d_3) tres espacios métricos. Considere $X_1 \times X_2$ equipado con cualquiera de las tres métricas definidas para el producto. Pruebe que $f\colon X_1 \times X_2 \to X_3$ es continua en $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d_1(x_1, y_1) \leq \delta, \quad d_2(x_2, y_2) \leq \delta \Longrightarrow d_3(f(x_1, x_2), f(y_1, y_2)) \leq \varepsilon.$$

La continuidad también puede caracterizarse sin hacer llamado explícito a la métrica y solo utilizando la noción de conjunto abierto. De hecho, es de esta manera que se definen las funciones continuas en un espacio topológico.

Proposición 3.1.4: Continuidad en términos de abiertos

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos. La función $f\colon X \to Y$ es continua si y solo si para todo abierto $U \subseteq Y$ se tiene que $f^{-1}(U) \subseteq X$ es abierto.

Demostración. Supongamos que f es continua. Sea $U \subseteq Y$ un abierto. Si $f^{-1}(U)$ es vacío, entonces $f^{-1}(U)$ es abierto. Supongamos entonces que $f^{-1}(U)$ es no vacío y sea $x \in f^{-1}(U)$. Esto significa que $f(x) \in U$. Como U es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathring{B}_Y(f(x), \varepsilon) \subseteq U$. Como f es continua, existe $\delta > 0$ tal que si $y \in \mathring{B}_X(x, \delta)$ entonces $f(y) \in \mathring{B}_Y(f(x), \varepsilon) \subseteq U$. Esto implica que $\mathring{B}_X(x, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$, lo que prueba que $f^{-1}(U)$ es abierto.

Supongamos que $f^{-1}(U) \subseteq X$ es abierto para todo abierto U de Y. Sean $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, $f^{-1}(\mathring{B}(f(x), \varepsilon)) \subseteq X$ es un abierto. Como este abierto contiene a x, existe $\delta > 0$ tal que $\mathring{B}(x, \delta) \subseteq f^{-1}(\mathring{B}(f(x), \varepsilon))$. Esto significa que si $d(x, y) < \delta$, entonces $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Esto prueba que f es continua. □

El siguiente ejercicio se puede demostrar tomando complementos en el resultado anterior.

Ejercicio 3.1.5

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos. Pruebe que una función $f\colon X \to Y$ es continua si y solo si para todo cerrado $C \subseteq Y$ se tiene que $f^{-1}(C) \subseteq X$ es cerrado.

Hay que tener cuidado con la dirección en la caracterización de continuidad. El siguiente ejercicio mostrará que los conversos en general no son ciertos.

Ejercicio 3.1.6

Considere $\mathbb{R}$ con la métrica euclidiana. Construya los ejemplos siguientes:

1. Un abierto $U \subseteq \mathbb{R}$ y una función continua $f\colon U \to \mathbb{R}$ tal que $f(U)$ no sea abierto.
2. Un cerrado $F \subseteq \mathbb{R}$ y una función continua $f\colon F \to \mathbb{R}$ tal que $f(F)$ no sea cerrado.

Ejercicio 3.1.7

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos. Pruebe que la función $f\colon X \to Y$ es continua en el punto x_0 en X si y solo si para todo abierto $V \subseteq Y$ que contiene a $f(x_0)$, existe un abierto $U \subseteq X$ que contiene a x_0 tal que $f(U) \subseteq V$.

A continuación veremos que también es posible caracterizar la continuidad en términos de sucesiones. En el caso de funciones continuas a variable real, sabemos que una función es continua si el límite a la izquierda y a la derecha existen. En el caso de un espacio métrico hay que considerar todas las maneras posibles de converger al valor, lo cual expresamos en términos de sucesiones.

Proposición 3.1.8: Caracterización de continuidad en términos de sucesiones

Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos. La función $f\colon X \to Y$ es continua en $\bar{x} \in X$ si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X que converge a $\bar{x}$, se tiene que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(\bar{x})$.

Demostración. Supongamos que f es continua en $\bar{x} \in X$, y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de X que converge a $\bar{x}$. Sea $\varepsilon > 0$. La continuidad de f en $\bar{x}$ implica que existe $\delta > 0$ tal que si $y \in X$ y $d(\bar{x}, y) \leq \delta$ entonces $d(f(\bar{x}), f(y)) \leq \varepsilon$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se tiene que $d(x_n, \bar{x}) \leq \delta$. Tenemos entonces que para todo $n \geq N$, $d(f(x_n), f(\bar{x})) \leq \varepsilon$, lo que prueba que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(\bar{x})$.

Supongamos que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de X convergente a $\bar{x}$, entonces $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(\bar{x})$. Si suponemos que f no es continua en $\bar{x}$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe $x_\delta \in B(\bar{x}, \delta)$ tal que $d(f(x_\delta), f(\bar{x})) > \varepsilon$. Esto permite construir una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $d(x_n, \bar{x}) \leq \frac{1}{n}$ y $d(f(x_n), \bar{x}) > \varepsilon$, lo cual contradice la hipótesis. □

Ejercicio 3.1.9

Sean (X, d_X), (Y, d_Y) y (Z, d_Z) tres espacios métricos. Considere las funciones $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to Z$. Pruebe que:

- Si f es continua en $x_0 \in X$ y g es continua en $f(x_0) \in Y$, entonces $g \circ f$ es continua en $x_0 \in X$.
- Si f y g son continuas, entonces $g \circ f : X \to Z$ es continua.

Ejercicio 3.1.10

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos. Sean $f : X \to Y$ y $g : X \to Y$ dos funciones continuas. Pruebe que el conjunto

$$\{x \in E : f(x) = g(x)\},$$

es cerrado.

3.2. Homeomorfismos, isomorfismos y compacidad

Consideremos un objeto matemático, por ejemplo: un conjunto, un espacio vectorial, un grupo, un cuerpo, etc. Una pregunta importante es cual es la noción de isomorfismo de este objeto. En el caso de un espacio topológico, los isomorfimos están dados por la noción de homeomorfismo.

Definición 3.2.1: Homeomorfismo

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos (o más generalmente, dos espacios topológicos). Una función $f : X \to Y$ es un **homeomorfismo** si f es biyectiva, y si f y f^{-1} son continuas.

Cuando existe un homeomorfismo entre dos espacios métricos, se dice que los espacios métricos son **homeomorfos**. Esta noción permite extender la idea de métricas equivalentes a espacios diferentes.

Ejercicio 3.2.2

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos con $X = Y$. Muestre que si d_X y d_Y son métricas equivalentes, entonces (X, d_X) e (Y, d_Y) son homeomorfos.

Podemos pensar que topológicamente dos espacios homeomorfos son esencialmente "el mismo espacio". En particular, todas las nociones topológicas tales como abierto, cerrado, compacto, convergencia de sucesiones; pueden transferirse utilizando un homeomorfismo.

Ejercicio 3.2.3

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos y $f : X \to Y$ un homeomorfismo. Muestre que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en X si y solamente si $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en Y.

Observación 3.2. No toda biyección continua es un homeomorfismo. Por ejemplo, si consideramos $X = [0, 1]$ equipado con la métrica discreta e $Y = [0, 1]$ equipado con la métrica euclidiana. Entonces la función identidad es continua y biyectiva, pero $f^{-1} : Y \to X$ no es continua.

Ejercicio 3.2.4

Considere $X = [0, 1)$ con la métrica d_X dada por

$$d_X(x, y) = \text{mín}\{|y - x|, 1 - |y - x|\},$$

y considere $Y = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ con la métrica d_Y dada por

$$d_Y(e^{2i\pi\theta}, e^{2i\pi\gamma}) = \text{mín}\{|\theta - \gamma|, 1 - |\theta - \gamma|\} \text{ para } 0 \leq \theta, \gamma < 1.$$

Muestre que (X, d_X) es homeomorfo a (Y, d_Y).

Ejercicio 3.2.5

Sea $C \subseteq [0, 1]$ el conjunto de Cantor con la métrica euclidiana y $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ con la métrica dada por $d(f, g) = 2^{-\text{ínf}\{n\in\mathbb{N}:f(n)\neq g(n)\}}$. Muestre que ambos espacios métricos son homeomorfos.

A continuación mostraremos que en el caso de un espacio métrico compacto, las funciones continuas biyectivas son automáticamente homeomorfismos. Para ello necesitaremos la siguiente proposición.

Proposición 3.2.6: Las imágenes continuas de compactos son compactas

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos, y sea $f : X \to Y$ una función continua. Si $K \subseteq X$ es compacto, entonces $f(K) = \{f(x) : x \in K\}$ es compacto en Y.

Demostración. Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $f(K)$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in K$ tal que $f(x_n) = y_n$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en K y K es compacto, existe una subsucesión $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a un elemento x de K. La continuidad de f implica que $(f(x_{n_j}))_{j\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x) \in f(K)$. Como $f(x_{n_j}) = y_{n_j}$, para todo $j \geq 0$, deducimos que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posee subsucesiones convergentes, lo que prueba que $f(K)$ es compacto. □

En un espacio compacto, para mostrar que una función f es un homeomorfismo, basta verificar que f es continua y biyectiva (la continuidad de f^{-1} en ese caso viene asegurada).

Corolario 3.2.7

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos y supongamos que X es compacto. Si $f : X \to Y$ es una biyección continua, entonces f es un homeomorfismo.

Demostración. Veamos que f^{-1} es continua. Sea $C \subseteq X$ un conjunto cerrado. Como X es compacto, entonces C es también compacto. Luego, por la Proposición 3.2.6 tenemos que $f(C) \subseteq Y$ es compacto, y por lo tanto, cerrado. Esto muestra que la preimagen de cualquier cerrado por f^{-1} es un cerrado, lo que equivale a decir que f^{-1} es continua. □

Definición 3.2.8: Máximos y mínimos de una función a valores en $\mathbb{R}$

Sea X un conjunto y sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f **alcanza un máximo** en X si existe $x_{\max} \in X$ tal que para todo $x \in X$ se tiene $f(x) \leq f(x_{\max})$. Análogamente, se

dice que f **alcanza un mínimo** en X si existe $x_{\text{min}} \in X$ tal que para todo $x \in X$ se tiene $f(x_{\text{min}}) \leq f(x)$.
A los valores $f(x_{\text{min}})$ y $f(x_{\text{max}})$ se les denomina **máximo** y **mínimo** de f respectivamente.

Observación 3.3. No toda función continua alcanza máximos y mínimos. Por ejemplo, la función identidad $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ no alcanza ni máximo ni mínimo.

Teorema 3.2.9: Principio del máximo

Sea (X,d) un espacio métrico y $K \subseteq X$ un conjunto compacto. Toda función continua $f\colon K \to \mathbb{R}$ alcanza mínimo y máximo.

Demostración. Dado que K es compacto, entonces $f(K) \subseteq \mathbb{R}$ es un compacto. Esto implica que $f(K)$ es un cerrado y acotado en $\mathbb{R}$. De aquí obtenemos que $\sup f(K) = M$ e $\operatorname{ínf} f(K) = m$ son elementos de $f(K)$. Luego, existe $x_{min} \in K$ tal que $f(x_{min}) = m$ y existe $x_{max} \in X$ tal que $f(x_{max}) = M$. Los elementos x_{min} y x_{max} son mínimo y máximo de f respectivamente. $\square$

Definición 3.2.10: Función uniformemente continua

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos. Una función $f\colon X \to Y$ es **uniformemente continua**, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo x, y verificando $d_X(x,y) \leq \delta$ se tiene $d_Y(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$.

La diferencia entre continuidad y continuidad uniforme es que cuando la función es continua, el valor de δ depende de x y de ε. Cuando la función es uniformemente continua, el valor de δ depende solo de ε.

Ejemplo 3.2.11

Si $f\colon X \to Y$ es uniformemente continua, entonces f es continua. Al revés no es cierto. Por ejemplo, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ es continua, pero no uniformemente continua. En efecto,

$$|(x+h)^2 - x^2| = |2xh + h^2| \geq 2|xh|.$$

Por lo tanto, si se busca $\delta > 0$ tal que $|f(x+h) - f(x)| \leq \varepsilon$, necesariamente se debe tomar $\delta \leq \varepsilon/2|x|$. Esto muestra que el valor de δ depende de ε y de x.

Ejercicio 3.2.12

Pruebe que la composición de dos funciones uniformemente continuas es uniformemente continua.

Proposición 3.2.13: Funciones continuas en compactos son uniformemente continuas

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos, y sea $f\colon X \to Y$ una función continua. Si X es compacto, entonces f es uniformemente continua.

Demostración. Supongamos que f no es uniformemente continua. Es decir, que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe un par de puntos x_δ, y_δ en X que verifican

$$d_X(x_\delta, y_\delta) \leq \delta \quad \text{y} \quad d_Y(f(x_\delta), f(y_\delta)) > \varepsilon.$$

De esto podemos formar dos sucesiones de puntos $(x_n)_{n\geq 0}$ e $(y_n)_{n\geq 0}$ tales que

$$d_X(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad d_Y(f(x_n), f(y_n)) > \varepsilon.$$

Como el espacio X es compacto, existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ de $(x_n)_{n\geq 0}$ convergente a un punto $x \in X$. Como se tiene que

$$d_X(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n}, \text{ para todo } n > 0,$$

la subsucesión $(y_{n_k})_{k\geq 0}$ también converge a x. Como f es continua, las sucesiones $f(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $f(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ deben converger ambas a $f(x)$, pero esto no es posible pues

$$d_Y(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) > \varepsilon.$$

□

Ejemplo 3.2.14: Funciones Lipschitz

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos. Una función $f\colon X \to Y$ es **Lipschitziana** o **Lipschitz** si existe un real $k > 0$ tal que para todo x e y en X se tiene

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq k d_X(x, y).$$

En este caso, se dice que f es k-Lipschitz. Las funciones Lipschitz son uniformemente continuas.

Un caso especial de las funciones Lipschitz es el de las isometrías, donde la constante es 1 y la desigualdad se convierte en igualdad.

Definición 3.2.15: Isometría

Sean (X, d_X), (Y, d_Y) dos espacios métricos. Una función

$$f\colon X \to Y$$

es una **isometría**, si para cada par $x, y \in X$ se cumple que

$$d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y)).$$

Si los homeomorfismos son la noción de isomorfismo para espacios topológicos, las isometrías biyectivas son la noción correspondiente para espacios métricos. En otras palabras, una isometría preserva no solo las propiedades topológicas, sino las propiedades finas de la métrica como la completitud, los conjuntos acotados e inclusive los valores de las distancias.

Observación 3.4. Si $f\colon X \to Y$ es una isometría, entonces en particular es 1-Lipschitz y en consecuencia uniformemente continua. notemos que las isometrías son también inyectivas, ya que si $f(x) = f(y)$, entonces $0 = d(f(x), f(y)) = d(x, y)$, luego $x = y$.

Ejemplo 3.2.16

Una isometría no es necesariamente biyectiva, por ejemplo, si consideramos $X = \mathbb{R}$ e $Y = \mathbb{R}^2$ con las respectivas métrica euclidianas, entonces $f\colon X \to Y$ dado por $f(x) = (x, 0)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ es una isometría que claramente no es sobreyectiva.

Observación 3.5. En algunas referencias en la literatura, la palabra isometría hace referencia a una isometría biyectiva. Es recomendable leer con cuidado las definiciones para tener claro del objeto en cuestión.

Ejemplo 3.2.17

Sean $X = \{x \in \mathbb{Z} : x \geq 1\}$ e $Y = \{y \in \mathbb{Z} : y \leq -1\}$ con la métrica euclidiana. Luego la función $f\colon X \to Y$ dada por $f(x) = -x$ es una isometría. Es intuitivo que estos dos espacios métricos son realmente “el mismo objeto pero pintado de otro color”.

Si $f\colon X \to Y$ es una isometría entre los espacios métricos (X, d_X) e (Y, d_Y), entonces podemos pensar en los espacios (X, d_X) y $f(Y)$ con la métrica inducida por d_Y en $f(Y)$ como “el mismo espacio”. En particular si f es sobreyectiva, podemos pensar en (X, d_X) e (Y, d_Y) como si fuesen “el mismo espacio”. Hay que notar que esta noción es mucho más fuerte que la noción de homeomorfismo. La primera preserva propiedades topológicas, en tanto que la noción de isometría preserva propiedades más finas ligadas a la métrica, tales como los conjuntos acotados.

Ejemplo 3.2.18

Dada una métrica d en un espacio X, la métrica $\bar{d}(x, y) = \text{mín}\{1, d(x, y)\}$ es equivalente a d y por lo tanto los espacios son homeomorfos (la función identidad es un homeomorfismo). Sin embargo si $X = \mathbb{R}$ y d es la métrica euclidiana no existen isometrías de $(\mathbb{R}, d)$ a $(\mathbb{R}, \bar{d})$, ya que $\mathbb{R}$ es acotado en el segundo espacio pero no en el primero.

Ejercicio 3.2.19

Muestre que si $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ son espacios topológicos homeomorfos, entonces $\dim(X, \mathcal{T}_X) = \dim(Y, \mathcal{T}_Y)$. Es decir, muestre que la dimensión topológica es invariante de homeomorfismo.

3.3. Conjuntos conexos y conexos por caminos

Definición 3.3.1: Conjuntos conexos y disconexos

Sea (X, d) un espacio métrico. Un subconjunto A de X es **disconexo**, si existen U_1 y U_2 abiertos disjuntos en X tales que $A \cap U_1 \neq \varnothing$, $A \cap U_2 \neq \varnothing$ y $A \subseteq U_1 \cup U_2$.
Si el conjunto no es disconexo se dice que es **conexo**.

Dicho de otro modo, un espacio métrico (X, d) es conexo si es imposible escribirlo como unión disjunta de dos abiertos no vacíos.

Proposición 3.3.2

El espacio métrico (X, d) es conexo si y solo si los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados a la vez son X y $\varnothing$.

Demostración. Supongamos que X es disconexo. Luego, existen abiertos disjuntos y no vacíos U_1 y U_2 tales que $X = U_1 \cup U_2$. Ya que $X \setminus U_1 = U_2$, tenemos que U_1 es también cerrado. Por otro lado, U_1 y $X \setminus U_1$ son no vacíos, lo que prueba la existencia de un conjunto abierto cerrado distinto de X y $\varnothing$. La recíproca es directa. $\square$

Proposición 3.3.3: $\mathbb{R}$ es conexo

$\mathbb{R}$ equipado con la métrica euclidiana es conexo.

Demostración. Supongamos que $\mathbb{R}$ no es conexo. Luego, existen abiertos cerrados no vacíos disjuntos A y B tales que $\mathbb{R} = A \cup B$. Construímos dos sucesiones reales $(a_n)_{n\geq 0}$ en A y $(b_n)_{n\geq 0}$ en B de la manera siguiente:

- Tomamos $a_0 \in A$ y $b_0 \in B$.
- Sea $\alpha = \frac{a_0+b_0}{2}$. Si $\alpha \in A$, definimos $a_1 = \alpha$ y $b_1 = b_0$. Si $\alpha \in B$, definimos $a_1 = a_0$ y $b_1 = \alpha$.
- Para $n \geq 1$, tomamos $\alpha = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$. Si $\alpha \in A$, definimos $a_n = \alpha$ y $b_n = b_{n-1}$. Si $\alpha \in B$, definimos $a_n = a_{n-1}$ y $b_n = \alpha$.

De esta forma se obtienen $(a_n)_{n\geq 0}$ en A y $(b_n)_{n\geq 0}$ en B, tales que

$$|a_n - b_n| \leq \frac{|a_{n-1} - b_{n-1}|}{2} \leq \frac{|a_0 - b_0|}{2^n},$$
$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{|a_n - b_n|}{2} \leq \frac{|a_0 - b_0|}{2^{n+1}},$$
$$|b_{n+1} - b_n| \leq \frac{|a_n - b_n|}{2} \leq \frac{|a_0 - b_0|}{2^{n+1}}.$$

Las últimas dos ecuaciones implican que $(a_n)_{n\geq 0}$ y $(b_n)_{n\geq 0}$ son de Cauchy. Luego, como $\mathbb{R}$ es completo y los conjuntos A, B son cerrados, existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ y $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. La primera desigualdad implica que $a = b$, lo que contradice que A y B sean disjuntos. $\square$

Ejercicio 3.3.4

Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$ tal que E completo. Pruebe que E es conexo.

Proposición 3.3.5

Considere $\mathbb{R}$ equipado con la métrica euclidiana. $A \subseteq \mathbb{R}$ es conexo si y solo si A es un intervalo.

DEMOSTRACIÓN. Para probar que un intervalo es conexo, se procede de igual forma que en la Proposición anterior.

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto conexo, y supongamos que A no es un intervalo, es decir, que existe $c \in \mathbb{R}$ y $a, b \in A$ tales que $a < c < b$ y $c \notin A$. Esto implica que $A \subseteq U_1 \cup U_2$, con $U_1 = (-\infty, c)$ y $U_2 = (c, \infty)$ (notar que U_1 y U_2 son abiertos en $\mathbb{R}$). Tenemos que $a \in U_1 \cap A \neq \varnothing$ y $b \in A \cap U_2 \neq \varnothing$, lo que contradice que A es conexo. $\square$

Ejercicio 3.3.6

Mostrar que en $\mathbb{R}$ con la métrica euclidiana, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son disconexos.

Ejemplo 3.3.7

Cualquier espacio X con al menos dos elementos equipado con la métrica discreta es disconexo. Más aun, es **totalmente disconexo**. Esto último significa que los únicos subconjuntos conexos son los singleton. En efecto, si $A \subseteq X$ tiene al menos dos elementos, definimos $U_1 = \{x\}$ y $U_2 = A \setminus \{x\}$, donde $x \in A$. Notar que U_1 y U_2 son dos abiertos disjuntos no vacíos que intersectan a A, cuya unión es igual a A. Esto prueba que A es disconexo.

Ejercicio 3.3.8

Pruebe que si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una colección no vacía de conjuntos conexos tales que $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \varnothing$, entonces $\bigcup_{i \in I} A_i$ es conexo.

Ejercicio 3.3.9

Pruebe que si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una colección no vacía de conjuntos conexos tales que para todo $i, j \in I$ $A_i \cap A_j \neq \varnothing$, entonces $\bigcup_{i \in I} A_i$ es conexo. *Indicación: fije $i_0 \in I$, defina $B_i = A_{i_0} \cup A_i$ para $i \in I$, y utilice el resultado del ejercicio anterior.*

Ejercicio 3.3.10

Muestre que el espacio de Cantor es totalmente disconexo.

Sea (X, d) un espacio métrico. En X se define la siguiente relación:

$$x \sim y \iff \text{ existe un subconjunto conexo } A \text{ de } X \text{ tal que } x, y \in A.$$

Esta es una relación de equivalencia (la transitividad es consecuencia del ejercicio anterior), por lo tanto, las clases de equivalencia de esta relación definen una partición de X.

Las clases de equivalencia de la relación antes definida son conjuntos conexos maximales para la inclusión de conjuntos conexos. En efecto, para todo $x \in X$, se tiene que $[x]_\sim$ es la unión de todos los conjuntos conexos que contienen a x. Luego, por el Ejercicio 3.3.8 se concluye que $[x]_\sim$ es conexo.

Definición 3.3.11: Componentes conexas

Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\sim$ la relación de equivalencia anterior. A las clases de equivalencia $[x]_\sim$ se les denomina **componentes conexas**.

Observación 3.6. Si X es conexo, entonces hay solo una componente conexa y esta es igual a X. Las componentes conexas de un espacio totalmente disconexo son los singleton.

Ejercicio 3.3.12

Sea (X, d) un espacio métrico y sea $M \subseteq X$. Pruebe que los conjuntos conexos de M con la métrica inducida por d también son conexos en X.

Proposición 3.3.13: Caracterización de abiertos en $\mathbb{R}$ por intervalos

Considere $\mathbb{R}$ equipado con la métrica euclidiana. Un conjunto $U \subseteq \mathbb{R}$ es abierto si y solamente si U es igual a la unión finita o numerable de intervalos abiertos disjuntos.

Demostración. Como la unión de conjuntos abiertos es siempre abierta, tan solo debemos demostrar la primera dirección. Sea $U \subseteq \mathbb{R}$ un abierto. Sean $\{U_i\}_{i \in I}$ las componentes conexas de U. Cada U_i es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$, por lo tanto, es un intervalo. Para probar que U_i es un intervalo abierto, basta mostrar que el ínfimo y el supremo de U_i no pertenecen a U_i.

Supongamos que $b_i = \text{ínf}(U_i)$ está en U_i. Luego, b_i está en U, y como U es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(b_i - \varepsilon, b_i + \varepsilon) \subseteq U$. Observe que todos los elementos de este intervalo están en la misma componente conexa que b_i, es decir, están en U_i. Pero esto contradice que b_i sea el ínfimo de U_i. De igual forma se prueba que el supremo de U_i no pertenece a U_i. Tenemos entonces que $U_i = (a_i, b_i)$, con $-\infty \leq a_i < b_i \leq \infty$, y además $U_i \cap U_j = \varnothing$ si $i \neq j$, pues se trata de las componentes conexas.

Ahora mostraremos que la colección $\{U_i\}_{i \in I}$ es numerable. Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ y los U_i son abiertos, para cada $i \in I$ existe $q_i \in \mathbb{Q}$ tal que $q_i \in U_i$. Como $U_i \cap U_j = \varnothing$ cuando $i \neq j$, tenemos que $q_i \neq q_j$. Luego, la función que a cada $i \in I$ le asocia $q_i \in \mathbb{Q}$ es inyectiva, lo que muestra que I es numerable. $\square$

Proposición 3.3.14: Imagenes de conexos por continuas son conexos

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) espacios métricos y $f \colon X \to Y$ una función continua. Si $A \subseteq X$ es conexo, entonces $f(A) \subseteq Y$ es conexo.

Demostración. Sea $A \subseteq X$ un conjunto conexo. Para probar que $f(A)$ es conexo, es suficiente mostrar que si U_1 y U_2 son abiertos disjuntos no vacíos en Y tales que $f(A) \subseteq U_1 \cup U_2$, entonces $f(A) \cap U_1 = \varnothing$ o $f(A) \cap U_2 = \varnothing$.

Como f es continua, $f^{-1}(U_1)$ y $f^{-1}(U_2)$ son abiertos en X. Además, $f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) = \varnothing$ y $A \subseteq f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2)$. Dado que A es conexo, esto implica que $f^{-1}(U_1) \cap A = \varnothing$ o $f^{-1}(U_2) \cap A = \varnothing$.

en el primer caso se tiene $f(A) \cap U_1 = \varnothing$, y en el segundo se tiene $f(A) \cap U_2 = \varnothing$. Esto muestra que $f(A)$ es conexo. □

Una aplicación de este resultado es la generalización del Teorema del Valor Intermedio a espacios métricos arbitrarios.

Corolario 3.3.15: Teorema del Valor Intermedio

Sea (X, d) un espacio métrico y $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función continua. Sea $A \subseteq X$ un conjunto conexo y sean x e y dos elementos de A. Sea c un número real entre $f(x)$ y $f(y)$, es decir, $f(x) \leq c \leq f(y)$ o $f(y) \leq c \leq f(x)$. Entonces existe $z \in A$ tal que $f(z) = c$.

Demostración. La Proposición 3.3.14 asegura que $f(A) \subseteq \mathbb{R}$ es conexo. Por lo tanto, $f(A)$ es un intervalo. Luego, si c es un número real entre $f(x)$ y $f(y)$ entonces está en el intervalo $f(A)$, lo que implica que existe $z \in A$ tal que $f(z) = c$. □

Observación 3.7. Si en el Corolario anterior reemplazamos X por $\mathbb{R}$ y A por un intervalo $[a, b]$, obtenemos el Teorema del Valor Intermedio visto en el curso de cálculo.

Corolario 3.3.16: Producto de conexos es conexo

Si (X, d_X) e (Y, d_Y) son espacios métricos conexos, entonces $(X \times Y, d)$ es conexo, donde d es cualquiera de las tres métricas que definimos para el producto de espacios métricos.

Demostración. Sean (a_1, a_2) y (b_1, b_2) dos elementos en $X \times Y$. La idea es probar es que ambos puntos están en la misma componente conexa. Para esto, definimos las funciones $f\colon X \to X \times Y$ y $g\colon Y \to X \times Y$ por $f(x) = (x, b_2)$ y $f(y) = (a_1, y)$, para todo $x \in X$ e $y \in Y$.

Ambas funciones son continuas, por lo tanto, los conjuntos

$$f(X) = X \times \{b_2\} \quad \text{y} \quad g(Y) = \{a_1\} \times Y,$$

son conexos. Observe que $(a_1, b_2) \in f(X) \cap g(Y)$. Luego, como $f(X)$ y $g(Y)$ son conexos con intersección no vacía, se tiene que $f(X) \cup g(Y)$ es conexo. Como (a_1, a_2) y (b_1, b_2) están en $f(X) \cup g(Y)$, deducimos que pertenecen a la misma componente conexa. Finalmente, concluímos que $X \times Y$ es conexo, pues esto es válido para cualquier par de elementos (a_1, a_2) y (b_1, b_2) en $X \times Y$. □

Ejercicio 3.3.17

Mostrar por inducción que un producto finito de espacios métricos conexos es conexo.

Definición 3.3.18: Camino

Sea (X, d) un espacio métrico. Un **camino** o **arco** uniendo los puntos x e y de X es una función continua $f\colon [0, 1] \to X$, tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$. Se dice que x e y son los **extremos** del camino.

Definición 3.3.19: Conexidad por caminos

Sea (X, d) un espacio métrico. Un conjunto $A \subseteq X$ se dice **conexo por arcos** o **conexo por caminos** si para todo x e y en A existe un camino f con extremos en x e y, cuya imagen está contenida en A.

Proposición 3.3.20: Conexidad por caminos implica la conexidad

Sea (X, d) un espacio métrico. Si $A \subseteq X$ es conexo por caminos entonces es conexo.

Demostración. Supongamos que A no es conexo. Entonces existen abiertos U_1 y U_2 disjuntos tales que $A \subseteq U_1 \cup U_2$, $A \cap U_1 \neq \varnothing$ y $A \cap U_2 \neq \varnothing$.

Sean $x \in A \cap U_1$ y $y \in A \cap U_2$. Como A es conexo por caminos, existe un camino $f\colon [0,1] \to A$ tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$. Esto implica que $f([0,1]) \cap U_1 \neq \varnothing$, $f([0,1]) \cap U_2 \neq \varnothing$. Pero como $f([0,1]) \subseteq A \subseteq U_1 \cup U_2$, esto contradice la conexidad de $f([0,1])$. □

Ejemplo 3.3.21

No todo conjunto conexo es conexo por caminos. Por ejemplo, considere $A \subseteq \mathbb{R}^2$ definido por

$$A = \{(x, \sin(1/x)) : x > 0\} \cup \{(0, x) : |x| \leq 1\}.$$

Este conjunto es conexo, pero no hay caminos que tengan como extremos los puntos $(0, 0)$ y $(1, \sin(1))$. Por lo tanto, no es conexo por arcos.

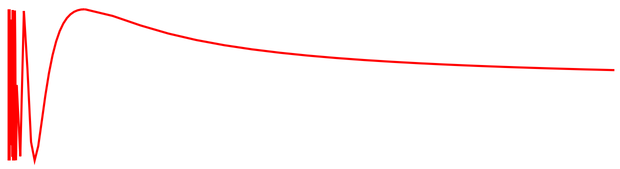


Figura 1. El conjunto A descrito en el Ejemplo 3.3.21

Observación 3.8. Bajo ciertas condiciones suplementarias, la conexidad puede ser equivalente a la conexidad por arcos. Por ejemplo, todo abierto en $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclidiana es conexo si y solo es conexo por arcos.

Ejercicio 3.3.22

Pruebe que todo abierto conexo de $\mathbb{R}^n$ es conexo por arcos.

Ejercicio 3.3.23: El peine del topólogo

Considere $\mathbb{R}^2$ con la métrica euclidiana y el conjunto P dado por

$$P = \{(0,1)\} \cup ([0,1] \times \{0\}) \cup \left(\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n > 0 \right\} \times [0,1] \right).$$

1. Haga un dibujito del conjunto P.
2. Muestre que P es conexo.
3. Muestre que P no es conexo por caminos. *Indicación: muestre que no hay ningún camino que conecte* $(0,0)$ *a* $(0,1)$.

3.4. Límites de funciones

Del mismo modo que en $\mathbb{R}$ definimos la noción de límite de una función cuando x tiende hacia un valor x_0 por la izquierda o derecha, es posible definir una noción de límite de una función en un espacio métrico donde x tiende hacia un valor x_0 tomando valores en un conjunto, provisto que x_0 esté en la adherencia de ese conjunto.

Definición 3.4.1

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos y $E \subseteq X$. Supongamos que x_0 es un punto de adherencia de E, $y_0 \in Y$ y sea $f\colon E \to Y$ una función. Decimos que

$$\lim_{x \to x_0, x \in E} f(x) = y_0,$$

si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d_Y(y_0, f(x)) \leq \varepsilon$, para todo $x \in E$ que satisface $d_X(x, x_0) \leq \delta$.

Formalmente,

$$\lim_{x \to x_0, x \in E} f(x) = y_0 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \left[(x \in E \wedge d_X(x, x_0) \leq \delta) \implies d_Y(y_0, f(x)) \leq \varepsilon \right].$$

En el caso en que $E = X$, abreviaremos la notación y escribiremos simplemente

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0, x \in X} f(x).$$

Ejercicio 3.4.2

Sean $X = Y = \mathbb{R}$ con las métricas euclidianas y sea $E = (0, +\infty) \subseteq X$. Pruebe que

$$\lim_{x \to 0, x \in E} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Ejemplo 3.4.3: El límite de sucesiones es un caso particular de este límite

Sea $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ con la métrica dada por $d_X(n_1, n_2) = |\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}|$ donde definimos $\frac{1}{\infty} = 0$. Considere $E = \mathbb{N}$.

Sea (Y, d_Y) otro espacio métrico. Una función $f\colon \mathbb{N} \to Y$ es una sucesión en Y. La noción usual de límite de una sucesión en (Y, d_Y) está dada por

$$\lim_{x \to \infty, x \in \mathbb{N}} f(x).$$

Notemos que en el caso en que $E = X$ recuperamos la definición de continuidad.

Observación 3.9. Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos y $f\colon X \to Y$ una función. f es continua si y solamente si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ para todo $x \in X$.

Observación 3.10. Otra manera de escribir la definición de límite es la siguiente:

$$\lim_{x \to x_0, x \in E} f(x) = y_0 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \left[x \in E \cap B_X(x_0, \delta) \implies f(x) \in B_Y(y_0, \varepsilon)\right].$$

Ejercicio 3.4.4

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos, $x_0 \in X, y_0 \in Y$ y sea $f\colon X \to Y$ una función.

1. Suponga que d_X es la métrica discreta y que $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$. Muestre que $f(x_0) = y_0$.
2. Suponga que d_Y es la métrica discreta y que $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$. Muestre que existe una bola abierta B en torno a x_0 tal que $f(x)$ es constante. ¿qué sucede si X es conexo y f es continua?

Proposición 3.4.5: Caracterización de límite mediante sucesiones

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos y $E \subseteq X$. Entonces $\lim_{x \to x_0, x \in E} f(x) = y_0$ si y solamente si para toda secuencia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$ que converge a x_0 tenemos que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a y_0.

Demostración. Supongamos que $\lim_{x \to 0, x \in E} f(x) = y_0$ y sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$ una secuencia que converge a x_0. Demostraremos que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a y_0.

En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{x \to x_0, x \in E} f(x) = y_0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in E \cap B_X(x_0, \delta)$ tenemos que $d_Y(y_0, f(x)) \leq \varepsilon$. Como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x_0, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, $x_n \in B_X(x_0, \delta)$. Como $x_n \in E$, esto implica que para todo $n \geq N$, $d_Y(f(x_n), y_0) \leq \varepsilon$. Como ε es arbitrario esto muestra que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a y_0.

Supongamos ahora que $\lim_{x \to x_0, x \in E} f(x) \neq y_0$, esto significa que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ podemos encontrar un $x_\delta \in E \cap B_X(x_0, \delta)$ tal que $d_Y(f(x_\delta), y_0) > \varepsilon$. Definamos una secuencia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donde $x_n = x_{\delta(n)}$ donde $\delta(n) = \frac{1}{n}$. Por un lado, como $x_n \in B_X(x_0, \frac{1}{n}) \cap E$ es claro que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x_0. Por otro lado, como $d_Y(f_{x_n}, y_0) > \varepsilon$, la secuencia $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ no puede converger a y_0. Eso muestra que existe una secuencia que no satisface la propiedad requerida. □

Observación 3.11. Dado que una secuencia converge a lo más a un valor, la última proposición implica que el límite, de existir, es único.

Ejercicio 3.4.6

Sean $X = \mathbb{R}^2$ e $Y = \mathbb{R}$ con las métricas euclidianas y sea $E = \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$. Considere la función $f\colon E \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xy}.$$

Muestre que el límite $\lim_{(x,y) \to (0,0), (x,y) \in E} f(x, y)$ no existe. *Pista:* Estudie secuencias en una vecindad de $(0, 0)$ en una recta de la forma $y = mx$.

Ejercicio 3.4.7

Sean $X = \mathbb{R}^2$ e $Y = \mathbb{R}$ con las métricas euclidianas y sea $E = (\mathbb{R}_{>0})^2$. Considere la función $f\colon E \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x,y) = \exp\left(-\frac{x}{y(x^2+y^2)}\right).$$

Muestre que el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0),(x,y)\in E} f(x,y)$ no existe. *Pista:* Muestre que el límite usando sucesiones que toman valores en la recta descrita por $y = mx$ con algún $0 < m < 1$ es 0, y que para todo $\delta > 0$ existe $\bar{x} \in E$ con $\|\bar{x}\| \leq \delta$ tal que $f(\bar{x}) = \frac{1}{2}$.

Ejercicio 3.4.8

Sean (X, d_X), (Y, d_Y) y (Z, d_Z) tres espacios métricos y sea $E \subseteq X$. Sean $x_0 \in E, y_0 \in Y$ y $z_0 \in Z$. Sean $f\colon E \to Y$ y $g\colon f(E) \to Z$ funciones.
Muestre que si

$$\lim_{x\to x_0, x\in E} f(x) = y_0 \quad \text{y} \quad \lim_{y\to y_0, y\in f(E)} g(y) = z_0,$$

entonces

$$\lim_{x\to x_0, x\in E} g\circ f(x) = z_0.$$

3.5. Teoremas de extensión

En esta sección estudiaremos resultados que permiten definir funciones en espacios métricos con valores prescritos, o extender funciones definidas en partes del espacio al resto del espacio. Comenzaremos con un resultado clásico.

Lema 3.5.1: Lema de Uryhson

Sea (X, d) un espacio métrico y sean $E, F \subseteq X$ dos conjuntos cerrados disjuntos. Entonces existe una función continua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in E$ y $f(y) = 1$ para todo $y \in F$.

Demostración. Basta definir

$$f(z) = \frac{d(z,E)}{d(z,E) + d(z,F)} \text{ para todo } z \in X.$$

La función f está bien definida, pues si $d(z,E) + d(z,F) = 0$, entonces $d(z,E) = d(z,F) = 0$, y como E, F son cerrados eso implicaría que $z \in E \cap F$, lo cual no puede suceder ya que es vacío. Además es claro que para todo $z \in X$ se tiene que $0 \leq f(z) \leq 1$.

Por la Proposición 3.1.2 la distancia es continua. Como la composición de funciones continuas es continua, obtenemos que f es continua. Es claro por la definición que $f(x) = 0$ para todo $x \in E$ y $f(y) = 1$ para todo $y \in F$. $\square$

Teorema 3.5.2: Teorema de extensión de Tietze

Sea (X,d) un espacio métrico, $F \subseteq X$ un conjunto cerrado, $a \leq b$ en $\mathbb{R}$ y $f\colon F \to [a,b]$ una función continua. Entonces existe una función continua $g\colon X \to [a,b]$ tal que

$$g(x) = f(x) \text{ para todo } x \in F,$$

Demostración. Definamos

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in F \\ \operatorname{ínf}\left\{ f(z) + \frac{d(x,z)}{d(x,F)} - 1 \,:\, z \in F \right\} & \text{if } x \in X \setminus F \end{cases}$$

Como F es cerrado, si $d(x,F) = 0$ entonces $x \in F$, por lo tanto la función g está bien definida. Claramente tenemos que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in F$.

Si $x \in X \setminus F$, entonces $d(x,z) \geq d(x,F)$ luego $\frac{d(x,z)}{d(x,F)} - 1 \geq 0$, lo cual muestra que $g(x) \geq \operatorname{ínf}_{z\in F} f(z) \geq a$. Por otro lado, tomando una secuencia $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(d(x,z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converja a $d(x,F)$, obtenemos que $g(x) \leq \sup_{z\in F} f(z) \leq b$. Luego $g(X) \subseteq [a,b]$.

Dejaremos como ejercicio demostrar que la función g es continua. $\square$

Observación 3.12. Los teoremas de Uryhson y Tietze son válidos en espacios topológicos que cumplen la propiedad de ser **normales**. Es decir, tales que para cada par de cerrados disjuntos E, F no vacíos existe un par de vecindades disjuntas V_1, V_2 tal que $E \subseteq V_1$ y $F \subseteq V_2$. Es claro que todo espacio métrico es normal.

En el contexto de espacios topológicos, La validez de los lemas de Uryhson y Tietze caracterizan la normalidad del espacio, y su prueba es más complicada que las pruebas que dimos en esta sección utilizando métricas. Ver Teorema 5.1 de [Mun00] y Teorema 2.1.8 de [Eng89].

Ejercicio 3.5.3

Sean (X,d_X) e (Y,d_Y) dos espacios métricos y $A \subseteq X$ un conjunto denso en X. Sean $f\colon X \to Y$ y $g\colon X \to Y$ dos funciones continuas tales que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$. pruebe que $f = g$.

La siguiente proposición nos da una condición necesaria y suficiente para extender a todo el espacio una función continua definida sobre un subconjunto denso.

Proposición 3.5.4

Sean (X,d_X) e (Y,d_Y) dos espacios métricos y sean $A \subseteq X$ un subconjunto denso en X y $f\colon A \to Y$ una función continua. Existe una función $g\colon X \to Y$ continua tal que $f = g|_A$ si y solo si para todo $x \in X$, y toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A que converge a x, el límite $\operatorname{lím}_{n\to\infty} f(x_n)$ existe y no depende de la sucesión. Además, si la función g existe es única, y se llama la **extensión** de f a X.

Demostración. Probemos primero la unicidad de la extensión. Supongamos que $g_1\colon X \to Y$ y $g_2\colon X \to Y$ son dos extensiones de f a X. Esto implica que $g_1(x) = g_2(x)$, para todo $x \in A$. Como A es denso en X, el Ejercicio 3.5.3 anterior implica que $g_1 = g_2$. Esto prueba la unicidad de la extensión cuando ésta existe.

Supongamos que existe $g\colon X \to Y$ continua tal que $f = g|_A$. Por continuidad de g, dada cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A que convergen a x, se tiene que $g(x) = \operatorname{lím}_{n\to\infty} g(x_n)$. Como

$g|_A = f$, esto equivale a decir que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g(x)$, lo que prueba la existencia del límite y que este no depende de la sucesión que se tome.

Supongamos que para todo $x \in X$, y toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A que converge a x, el límite $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ existe y no depende de la sucesión. Definimos $g\colon X \to Y$ como

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) & \text{si } x \notin A, \end{cases}$$

donde $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es cualquier sucesión de elementos de A que converge a x (recordar que tal sucesión existe pues A es denso). Por hipótesis, g está bien definida. Además, $g|_A = f$. La demostración de la continuidad de g queda como ejercicio. □

Ejercicio 3.5.5

Pruebe que la función $g\colon X \to Y$ descrita en la prueba de la Proposición 3.5.4 es continua.

Teorema 3.5.6

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos, $A \subseteq X$ un subconjunto denso en X y $f\colon A \to Y$ una función continua. Si Y es completo y f es uniformemente continua, entonces existe una única función continua $g\colon X \to Y$ que extiende a f. Además, g es uniformemente continua.

Demostración. Sea $x \in X$ y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de A que converge a x (siempre existe tal sucesión pues A es denso). Sea $\varepsilon > 0$. Como f es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que si y_1 e y_2 son puntos tales que $d_X(y_1, y_2) \le \delta$, entonces $d_Y(f(y_1), d(y_2)) \le \varepsilon$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n \ge n_0$ se tiene que $d_X(x_n, x_m) \le \delta$. Luego, $d_Y(f(x_n), f(x_m)) \le \varepsilon$. Esto prueba que $(f(x_n))_{n\ge 0}$ es una sucesión de Cauchy, y como Y es completo, converge a un punto $y \in Y$.

Sea $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ otra sucesión de elementos de A que converge a x. Por el mismo argumento anterior, existe $y' \in Y$ tal que $(f(x'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a y'.

Observe que para n suficientemente grande, $d_X(x_n, x'_n) \le \delta$, lo que implica que $d_Y(y, y') \le 2\varepsilon$. Como esto es válido para todo $\varepsilon > 0$, concluímos que $y = y'$. Luego, la existencia de g está dada por la Proposición 3.5.4.

Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\delta > 0$ tal que si x e y son puntos en A a distancia menor o igual a δ, entonces $f(x)$ y $f(y)$ están a distancia menor o igual que $\frac{\varepsilon}{3}$. Para probar que g es uniformemente continua, sean x e y en X tales que $d_X(x, y) \le \frac{\delta}{2}$. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en A convergente a a x e y respectivamente. Luego, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d_X(x_n, y_n) \le \delta$. Como $g(x_n) \to g(x)$ y $g(y_n) \to g(y)$, existe $n \ge n_0$ tal que $d_Y(g(x_n), g(x)) \le \frac{\varepsilon}{3}$ y $d_Y(g(y_n), g(y)) \le \frac{\varepsilon}{3}$. Esto implica que

$$d_Y(g(x), g(y)) \le d_Y(g(x), g(x_n)) + d_Y(f(x_n), f(y_n)) + d_Y(g(y_n), g(y_n)) \le \varepsilon,$$

lo que prueba que g es uniformemente continua. La unicidad está dada por el lema anterior. □

Observación 3.13. El Teorema 3.5.6 no funciona si Y no es completo. Por ejemplo, tomemos $X = [0, 1]$, $A = (0, 1)$, $Y = (0, 1)$, y $f\colon A \to Y$ la identidad. Si existiera una extensión $g\colon [0, 1] \to (0, 1)$ de f, para $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a $x = 1$ se tendría $g(x_n) = x_n$ converge a $x = f(x)$, lo que no puede ser pues $x = 1$ no pertenece a $(0, 1)$.

Observación 3.14. El Teorema 3.5.6 tampoco funciona si f no es uniformemente continua. Por ejemplo, sean $X = Y = [-1, 1]$, $A = [-1, 1] \setminus \{0\}$ y $f\colon A \to Y$ dada por $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$.

Esta función es continua pero no uniformemente continua, pues alrededor de 0 las oscilaciones se hacen cada vez más frecuentes sin disminuir su amplitud, lo que no permite extenderla a $[-1,1]$ de manera continua.

Ejercicio 3.5.7

Considere el espacio $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de matrices cuadradas de tamaño n con coeficientes en $\mathbb{R}$ con la norma dada por $\|A\| = \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|$ para toda matriz $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. Recuerde que el polinomio característico de A está dado por la expresión $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Muestre que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y A es invertible, entonces $p_{AB} = p_{BA}$.
2. Considere el espacio de polinomios a variable real $\mathbb{R}[x]$ con la norma $\|p\| = \sup_{\lambda\in[0,1]} |p(\lambda)|$. Muestre que la función que asigna a una matriz su polinomio característico es continua.
3. Muestre que el conjunto de las matrices invertibles $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ es denso en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Concluya que $p_{AB} = p_{BA}$ para todo par de matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (no necesariamente invertibles).

3.6. Completación de un espacio métrico

En esta sección probaremos que todo espacio métrico puede ser visto como un subconjunto denso de otro espacio métrico que es completo. En otras palabras, si el espacio métrico no es completo, entonces es posible completarlo de manera de obtener un nuevo espacio métrico que sí es completo.

Teorema 3.6.1: Completación de un espacio métrico

Sea (X, d) un espacio métrico. Existe un espacio métrico completo $(\widehat{X}, \widehat{d})$ y una isometría $f\colon X \to \widehat{X}$, tal que $f(X)$ es denso en $\widehat{X}$. El espacio $(\widehat{X}, \widehat{d})$ es único, salvo isometría biyectiva, y se llama la **completación** de (X, d).

La demostración del teorema anterior se puede esquematizar de manera intuitiva del siguiente modo. Si existiese una sucesión de Cauchy que no converge, debemos asignarle de manera artificial un "límite". Con este fin, consideraremos la clase de equivalencia de todas las sucesiones de Cauchy tales que para todo $\varepsilon > 0$ su términos estén eventualmente a distancia menor que ε. Esta clase de equivalencia puede interpretarse como un límite de la secuencia. Lo que haremos será dotar al espacio $\widehat{X}$ de estas clases de equivalencia de una métrica $\widehat{d}$ de modo tal que X pueda identificarse, mediante una isometría, con un subconjunto denso de $\widehat{X}$.

Demostración. Probemos primero la unicidad (salvo isometría). Sean $(\widehat{X}_1, \widehat{d}_1)$ y $(\widehat{X}_2, \widehat{d}_2)$ dos espacios métricos completos tales que existen isometrías $f_1\colon X \to \widehat{X}_1$ y $f_2\colon X \to \widehat{X}_2$, con $f_1(X)$ denso en $\widehat{X}_1$ y $f_2(X)$ denso en $\widehat{X}_2$. Como f_1 es inyectiva, $f_1^{-1}\colon f_1(X) \to X$ está bien definida. Definimos entonces $f = f_2 \circ f_1^{-1}\colon f_1(X) \to \widehat{X}_2$. Esta función es una isometría, por lo tanto, es uniformemente continua. Como $\widehat{X}_2$ es completo y $f_1(X)$ es denso en $\widehat{X}_1$, existe $g\colon \widehat{X}_1 \to \widehat{X}_2$ uniformemente continua que extiende a f. Veamos que g es una isometría biyectiva:

Sean x e y en $\widehat{X}_1$, y sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en $f_1(X)$ convergentes a x e y respectivamente. Ya que $g(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ y $g(y) = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$, para $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$,

$$\widehat{d}_2(g(x), g(y)) \leq \widehat{d}_2(g(x), f(x_n)) + \widehat{d}_2(f(x_n), f(y_n)) + \widehat{d}_2(f(y_n), g(y))$$

$$\begin{aligned}&\le \varepsilon + \widehat{d}_2(f(x_n), f(y_n))\\&= \varepsilon + \widehat{d}_1(x_n, y_n)\\&\le \varepsilon + \widehat{d}_1(x_n, x) + \widehat{d}_1(x, y) + \widehat{d}_1(y, y_n).\end{aligned}$$

Tomando n más grande si es necesario, tenemos que

$$\widehat{d}_2(g(x), g(y)) \le 2\varepsilon + \widehat{d}_1(x, y).$$

Como esto es válido para todo $\varepsilon > 0$, concluímos que $\widehat{d}_2(g(x), g(y)) \le \widehat{d}_1(x, y)$. De forma similar se prueba que $\widehat{d}_1(x, y) \le \widehat{d}_2(g(x), g(y))$, lo que muestra que g es una isometría. Toda isometría es inyectiva, por lo tanto, solo queda mostrar que g es sobreyectiva.

Para esto, observe que $f(f_1(X)) = f_2(X)$ es denso en $\widehat{X}_2$, y que $f(f_1(X)) \subseteq g(\widehat{X}_1)$. Luego, para mostrar que g es sobreyectiva basta probar que $g(\widehat{X}_1)$ es cerrado. Considere $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $g(\widehat{X}_1)$ que converge a $y \in \widehat{X}_2$, y sea $x_n \in \widehat{X}_1$ tal que $g(x_n) = y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente es de Cauchy. Por lo tanto, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \ge n_0$ se tiene que

$$\widehat{d}_2(y_n, y_m) = \widehat{d}_1(x_n, x_m) \le \varepsilon.$$

Esto muestra que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también es de Cauchy, por lo tanto, la completitud de $\widehat{X}_1$ implica que existe $x \in \widehat{X}_1$ tal que $x_n \to x$. La continuidad de g implica que $g(x_n) = y_n \to g(x)$, lo que muestra que $y = g(x) \in g(\widehat{X}_1)$. Por lo tanto, $g(\widehat{X}_1)$ es cerrado y en consecuencia g es una isometría biyectiva.

Para probar la existencia de $(\widehat{X}, \widehat{d})$, considere el conjunto

$$\mathcal{X} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sucesión de elementos de } X : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es de Cauchy } \}.$$

Sobre $\mathcal{X}$ se define la siguiente relación:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

Esta es una relación de equivalencia, y denotamos por $\widehat{X}$ el espacio cuociente de esta relación. Definimos sobre $\widehat{X} \times \widehat{X}$ la siguiente aplicación:

$$\widehat{d}([(x_n)_{n\in\mathbb{N}}], [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n).$$

Para verificar que $\widehat{d}$ está bien definida, hay que comprobar que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ existe y que este límite no depende de los representantes de la clase que se escojan. Para lo primero, observe que

$$d(x_m, y_m) \le d(x_m, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y_m).$$

De donde se deduce que

$$d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n) \le d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n).$$

Intercambiando el rol de n y m se obtiene que $|d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n)| \le d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n)$ y por lo tanto $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ existe.

Para lo segundo, sea $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \ge N$ se tiene que $d(x'_n, x_n) \le \varepsilon$. Se sigue que

$$d(x'_n, y_n) \le d(x'_n, x_n) + d(x_n, y_n) \le d(x_n, y_n) + \varepsilon.$$

Cambiando el rol de x'_n y x_n se obtiene que $|d(x'_n, y_n) - d(x_n, y_n)| \le \varepsilon$. Como ε es arbitrario, se concluye que los límites $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ y $\lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n)$ son iguales.

Esto muestra que $\widehat{d}$ está bien definida. Además $\widehat{d}$ es una métrica, por lo tanto, $(\widehat{X}, \widehat{d})$ es un espacio métrico.

Definimos $f\colon X \to \widehat{X}$ de la manera siguiente:

$$f(x) = [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}], \text{ donde } x_n = x \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Esta función está bien definida pues la sucesión tal que todos sus términos son iguales a x es convergente y entonces es de Cauchy. Es claro que f es una isometría. Para verificar que $f(X)$ es denso en $\widehat{X}$, considere $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \widehat{X}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $((y^k)_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión constante $y_n^k = x_k$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Observe que $[(y_n^k)_{n\in\mathbb{N}}] = f(x_k)$, por lo tanto, $[(y_n^k)_{n\in\mathbb{N}}] \in f(X)$. La idea es probar que $([(y_n^k)_{n\in\mathbb{N}}])_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$. Para esto, note que

$$\widehat{d}([(x_n)_{n\in\mathbb{N}}], [(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_k).$$

Por lo tanto, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, para $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq n_0$,

$$\widehat{d}([(x_n)_{n\in\mathbb{N}}], [(x_n^m)_{n\in\mathbb{N}}]) \leq \varepsilon.$$

Esto muestra que $([(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}])_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$. Por lo tanto, $f(X)$ es denso en $\widehat{X}$.

Veamos ahora que $(\widehat{X}, \widehat{d})$ es completo. Sea $([(x_n^m)_{n\in\mathbb{N}}])_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\widehat{X}$. Luego, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $m, k \geq n_\varepsilon$, entonces

$$\widehat{d}([(x_n^m)_{n\in\mathbb{N}}], [(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n^m, x_n^k) \leq \varepsilon.$$

Para $\varepsilon = \frac{1}{m}$ llamamos n_m a n_ε. Observe que si $k > m$, podemos suponer que $n_k > n_m$. También podemos tomar $l_k > l_m$, donde

$$d(x_{l_m}^{n_{m+1}}, x_{l_m}^{n_m}) \leq \frac{1}{2^{m-1}}.$$

Considere la sucesión $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ definida por

$$y_m = x_{l_m}^{n_m}.$$

Para $k > m$ se tiene que

$$d(y_m, y_k) \leq \sum_{s=m}^{k-1} d(y_s, y_{s+1}) = \sum_{s=m}^{k-1} d(x_{l_s}^{n_s}, x_{l_{s+1}}^{n_{s+1}}) \leq \sum_{s\geq m} 1/2^{s-1}.$$

Esto muestra que $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en X, y entonces $[(y_m)_{m\in\mathbb{N}}] \in \widehat{X}$. Además,

$$\begin{aligned}
\widehat{d}([(x_m^k)_{m\in\mathbb{N}}], [(y_m)_{m\in\mathbb{N}}]) &= \lim_{m\to\infty} d(x_m^k, y_m) \\
&= \lim_{m\to\infty} d(x_m^k, x_{l_m}^{n_m}) \\
&\leq \lim_{m\to\infty} d(x_m^k, x_{l_m}^k) + \lim_{m\to\infty} d(x_{l_m}^k, x_{l_m}^{n_m}).
\end{aligned}$$

Como $(x_m^k)_{m\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, $\lim_{m\to\infty} d(x_m^k, x_{l_m}^k) = 0$. Para $k \geq n_m$, se tiene

$$\lim_{m\to\infty} d(x_{l_m}^k, x_{l_m}^{n_m}) \leq 1/2^m.$$

Luego, $[(y_m)_{m\in\mathbb{N}}]$ es el límite de $([(x_n^m)_{n\in\mathbb{N}}])_{m\in\mathbb{N}}$. Esto muestra que $(\widehat{X}, \widehat{d})$ es completo. □

Observación 3.15. El conjunto de los números reales puede a priori "construirse" a partir de los racionales utilizando la construcción anterior. Sin embargo, en la demostración utilizamos varias veces el hecho de que $\mathbb{R}$ es completo, por lo cual se cae en un argumento circular. Es posible modificar aquellos argumentos de modo tal que solo se utilice una "distancia" racional que se extiende a valores en su completación, sin embargo tal tipo de argumentos están fuera del alcance de éste apunte.

Capítulo 4

Espacios de funciones

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos. Nos interesaremos en conjuntos de funciones entre X e Y que satisfacen propiedades interesantes con respecto a las métricas. Por ejemplo, podemos considerar los conjuntos siguientes:

- $C(X, Y) = \{f : X \to Y \mid f$ es una función continua $\}$.
- $L(X, Y) = \{f : X \to Y \mid f$ es una función lineal $\}$.
- $B(X, Y) = \{f : X \to Y \mid f$ es función acotada $\}$.
- $\mathbb{R}[x] = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid p$ es un polinomio $\}$.

El objetivo de este capítulo es estudiar nociones de convergencia en estos espacios. En particular, estudiaremos dos nociones de convergencia: convergencia puntual y uniforme. Antes de entrar en ello daremos una pequeña generalización de la noción de límite de cálculo y de su relación con la continuidad.

4.1. Convergencia puntual

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos. Nos interesaremos en secuencias de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde $f_n : X \to Y$. La pregunta que queremos resolver es ¿qué significa que la secuencia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sea convergente hacia una función $f : X \to Y$?

Mostraremos que hay al menos dos respuestas, y que una de ellas es "mejor" que la otra en lo que respecta a preservar propiedades como la continuidad, poder intercambiar límites, etc.

Definición 4.1.1

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de funciones de X en Y. Decimos que la secuencia de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge puntualmente** a una función $f : X \to Y$ si para todo $x \in X$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

La función f se denomina el **límite puntual** de la secuencia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Es decir, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f si y solamente si

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \ [d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon].$$

Observación 4.1. La definición de límite puntual no usa en ningún modo la métrica de X.

Ejercicio 4.1.2

Muestre que la secuencia de funciones $(f_n)_{n\geq 1}$ dada por $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f_n(x) = \frac{x^2}{n}$ converge puntualmente a la función constante igual a 0.

Ejercicio 4.1.3

Construya una secuencia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones $f_n\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sin límite puntual.

Ejercicio 4.1.4

Caracterice la convergencia puntual de una secuencia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones $f_n\colon \mathbb{R}\to Y$ donde (Y, d_Y) es un espacio con la métrica discreta.

Ejemplo 4.1.5: El límite puntual no respeta la continuidad

Sea $n\geq 1$ y considere $f_n\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ dada por $f_n(x)=x^n$. Tenemos que el límite puntual de $(f_n)_{n\geq 1}$ está dada por la función $g\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ dada por:

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0\leq x<1 \\ 1 & \text{si } x=1 \end{cases}$$

Para todo $n\geq 1$, la función x^n es continua en $[0,1]$, sin embargo el límite puntual g no lo es.

El próximo ejemplo mostrará que la convergencia puntual tampoco se comporta bien con los límites, en el sentido de que no se pueden intercambiar ambas nociones de límite.

Ejemplo 4.1.6: El límite puntual no se puede intercambiar con el límite usual

Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ la misma secuencia del Ejemplo 4.1.5 (i.e $f_n(x)=x^n$) y sea g su límite puntual. Por un lado

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 1, x\in(0,1)} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Por otro lado,

$$\lim_{x\to 1, x\in(0,1)}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{x\to 1, x\in(0,1)} g(x) = 0.$$

En consecuencia no es posible en general intercambiar el límite con la convergencia puntual.

El próximo ejemplo mostrará que la convergencia puntual tampoco se comporta bien con respecto a la integral, inclusive si cada una de las funciones en la secuencia es continua y tiene la misma integral.

Ejemplo 4.1.7: El límite puntual no se puede intercambiar con la integral

Sea $(f_n)_{n\geq 2}$ la secuencia de funciones $f_n\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ dadas por

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } x\in[0,\frac{1}{n}] \\ 2n-n^2x & \text{si } x\in(\frac{1}{n},\frac{2}{n}] \\ 0 & \text{si } x\in(\frac{2}{n},1]. \end{cases}$$

Es claro ver que cada una de las funciones f_n es continua y su integral es $\int_0^1 f_n \mathrm{d}x = 1$. También es obvio que el límite puntual de f_n es la función constante igual a 0. Tenemos entonces que por un lado

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Y por el otro lado,

$$\int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 0\ \mathrm{d}x = 0.$$

En consecuencia no es posible en general intercambiar la integral con la convergencia puntual.

A pesar de estos ejemplos negativos, la convergencia puntual sí es útil cuando buscamos preservar propiedades suficientemente "rígidas". El siguiente ejercicio busca mostrar que el límite puntual preserva la linealidad en dimensión finita.

Ejercicio 4.1.8

Sean $k, m \geq 1$ y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de funciones lineales $f_n \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$. Muestre que si la secuencia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f entonces f es lineal.

Observación 4.2. El resultado del ejercicio anterior es un caso especial que se desprende del Teorema de Banach-Steinhaus (ver Teorema 5.4.1 y Corolario 5.4.2). Este resultado permite mostrar que lo anterior es cierto para secuencias arbitrarias de funciones lineales continuas entre dos espacios vectoriales normados, donde el espacio de partida es completo.

La razón por la cual la convergencia puntual se comporta tan mal, es que si bien para cada $x \in X$ la secuencia $f_n(x)$ converge a un valor, es posible que la "velocidad" a la cual esta secuencia converja sea muy distinta para cada x. La próxima noción de convergencia impone que esta velocidad sea "uniforme" para todo $x \in X$.

4.2. Convergencia uniforme

Definición 4.2.1

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de funciones de X en Y. Decimos que la secuencia de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformemente** a una función $f \colon X \to Y$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ y $x \in X$,

$$d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon.$$

La función f se denomina el **límite uniforme** de la secuencia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Es decir, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f si y solamente si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in X,\ \left[d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon\right].$$

Observación 4.3. Si el límite uniforme de una secuencia de funciones existe, entonces el límite puntual también existe y estos coinciden.

Ejercicio 4.2.2

Sea I un conjunto acotado de $\mathbb{R}$ con la métrica euclidiana. Muestre que la secuencia de funciones $f_n \colon I \to \mathbb{R}$ definida como $f_n(x) = \frac{x^2}{n}$ converge uniformemente a la función constante igual a 0. ¿qué sucede si reemplazamos I por $\mathbb{R}$?

Ejercicio 4.2.3

Muestre que las secuencias de funciones de los Ejemplos 4.1.6 and 4.1.7 no convergen uniformemente.

4.3. Propiedades de la convergencia uniforme

Recordemos que la convergencia puntual se comporta mal con respecto a la continuidad, límites e integrales. Mostraremos que la convergencia uniforme es mejor en estos aspectos.

Proposición 4.3.1: Intercambio de límite y límite uniforme

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) espacios métricos y suponga que (Y, d_Y) es completo. Sea $E \subseteq X$ y x_0 un punto de adherencia de E. Suponga que

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una secuencia de $f_n \colon E \to Y$ que converge uniformemente a $f \colon E \to Y$.
- Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to x_0, x\in E} f_n(x)$ existe.

Entonces se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0, x\in E} f_n(x)\right) \text{ existe y } \lim_{x\to x_0, x\in E} f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0, x\in E} f_n(x)\right).$$

Demostración. Dado que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to x_0, x\in E} f_n(x) = y_n$ existe, podemos considerar la secuencia $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de esos límites. Probaremos primero que es una secuencia de Cauchy.

Sea $\eta > 0$. Cómo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f, tenemos que para $\varepsilon = \frac{\eta}{4}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ y $x \in E$ entonces $d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$. Por otro lado, para todo $n \in \mathbb{N}$ como $\lim_{x\to x_0, x\in E} f_n(x) = y_n$, tenemos que para $\varepsilon' = \frac{\eta}{4}$ existe $\delta'_n > 0$ tal que si $x \in E \cap B_X(x_0, \delta'_n)$ entonces $d_Y(f_n(x), y_n) \leq \varepsilon'$.

Sean $m, n \geq N$ y sea $\bar{x} \in B_X(x_0, \min(\delta'_m, \delta'_n)) \cap E$. Usando la desigualdad triangular cuatro veces obtenemos que:

$$\begin{aligned} d_Y(y_m, y_n) &\leq d_Y(y_m, f_m(\bar{x})) + d_Y(f_m(\bar{x}), f(\bar{x})) + d_Y(f(\bar{x}), f_n(\bar{x})) + d_Y(f_n(\bar{x}), y_n) \\ &\leq 2\varepsilon + 2\varepsilon' \\ &= \eta. \end{aligned}$$

Es decir, para todo $\eta > 0$ podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq N$, $d_Y(y_m, y_n) \leq \eta$, lo cual significa que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Como (Y, d_Y) es completo, concluimos que la secuencia $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a algún $\bar{y} \in Y$ y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0, x\in E} f_n(x)\right) \text{ existe y es igual a } \bar{y}.$$

Finalmente, mostremos que $\lim_{x\to x_0, x\in E} f(x) = \bar{y}$. Nuevamente, sea $\eta > 0$ y tomemos $\varepsilon = \frac{\eta}{3}$. Por un lado, por la convergencia uniforme sabemos que existirá $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N_1$ y $x \in E$ entonces $d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$. Por el otro lado, por la segunda condición, sabemos para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in E \cap B_X(x_0, \delta_n)$ tenemos que $d_Y(f_n(x), y_n) \leq \varepsilon$. Finalmente, como $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\bar{y}$, tenemos que existe un $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N'$ tenemos que $d_Y(y_n, \bar{y}) \leq \varepsilon$.

Usando los tres argumentos anteriores tenemos que para todo $\eta > 0$, si tomamos $N = \max(N_1, N_2)$ y el valor $\delta_N > 0$ determinado por ε y N, entonces para todo $x \in E \cap B_X(x_0, \delta_N)$

$$\begin{aligned} d_Y(f(x),\bar{y}) &\leq d_Y(f(x),f_N(x)) + d_Y(f_N(x),y_N) + d_Y(y_N,\bar{y}) \\ &\leq 3\varepsilon \\ &= \eta. \end{aligned}$$

En otras palabras, que $\lim_{x\to x_0, x\in E} f(x) = \bar{y}$. □

Observación 4.4. En el resultado anterior la completitud de (Y, d_Y) tan solo se utilizó para mostrar que la secuencia $(\lim_{x\to x_0, x\in E} f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un elemento de Y. Si podemos asegurar de otra forma que esa secuencia es convergente, podemos prescindir de la hipótesis de completitud,

Una consecuencia de este resultado (y la observación) es que el límite uniforme de funciones preserva la continuidad.

Teorema 4.3.2: La convergencia uniforme preserva la continuidad

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) espacios métricos y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de funciones continuas $f_n\colon X \to Y$ que converge uniformemente a $f\colon X \to Y$. Entonces f es continua.

Demostración. Recordemos que f es continua si y solamente si para todo $x_0 \in X$ $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. En particular como cada función f_n es continua obtenemos que $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = f_n(x_0)$. Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0, x\in E} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$

En particular como $\lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to x_0, x\in E} f_n(x))$ existe podemos prescindir de la hipótesis de completitud en la proposición anterior y obtenemos que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

lo cual significa que f es continua en x_0. Como x_0 es arbitrario esto prueba que f es continua. □

Ejercicio 4.3.3

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) espacios métricos, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de funciones continuas $f_n\colon X \to Y$ que converge uniformemente a una función $f\colon X \to Y$. Finalmente, sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de valores en X que converge a un valor $\bar{x}$. Muestre que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(\bar{x}).$$

Antes de introducir el próximo resultado, debemos recordar la noción de función acotada.

Definición 4.3.4: Función acotada

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) espacios métricos. Una función $f\colon X \to Y$ se dice **acotada** si existe $r > 0$ e $y \in Y$ tal que $f(X) \subseteq B_Y(y, r)$.

Proposición 4.3.5: La convergencia uniforme preserva la propiedad de ser acotada

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) espacios métricos y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de funciones acotadas $f_n\colon X \to Y$ que converge uniformemente a $f\colon X \to Y$. Entonces f es acotada.

Demostración. Cómo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f, tenemos que para $\varepsilon = 1$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ y $x \in X$ entonces $d_Y(f_n(x), f(x)) \leq 1$. Por otro lado, como f_N es acotada existe $y_N \in Y$ y $r_N > 0$ tal que $f_N(x) \in B_Y(y_N, r_N)$ para todo $x \in X$.

Combinando estas dos propiedades, tenemos que para todo $x \in X$,

$$d_Y(f(x), y_N) \leq d_Y(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), y_N) \leq 1 + r_N$$

Es decir, $f(x) \in B(y_N, 1 + r_N)$ para todo $x \in X$, lo cual muestra que f es acotada. □

El siguiente ejercicio mostrará que es en la proposición anterior, la condición de convergencia uniforme es relevante, es decir, no basta con convergencia puntual.

Ejercicio 4.3.6

Construya una secuencia de funciones continuas $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ acotadas cuyo límite puntual exista y no sea una función acotada.

Proposición 4.3.7: Intercambio de integral y límite uniforme

Sea $I = [a, b]$ y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de funciones $f_n\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemman integrables que convergen uniformemente a una función $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Entonces f es Riemman integrable y

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Demostración. Recordemos que una función $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ es Riemman integrable si los valores

$$\overline{\int_a^b} f\mathrm{d}x = \inf_{u\geq f} \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{y} \quad \underline{\int_a^b} f\mathrm{d}x = \sup_{\ell\leq f} \int_a^b \ell(x)\,\mathrm{d}x$$

coinciden, donde ℓ y u son funciones constantes por pedazos.

Usando que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f, tenemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ y $x \in [a, b]$ tenemos que $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. En particular tenemos que

$$\underline{\int_a^b} (f_n(x) - \varepsilon)\,\mathrm{d}x \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} (f_n(x) + \varepsilon)\,\mathrm{d}x.$$

Cómo asumimos que f_n es Riemman integrable, podemos reemplazar el primer y último elemento en la inecuación superior y obtenemos:

$$\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - (b-a)\varepsilon \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x + (b-a)\varepsilon.$$

De donde deducimos que

$$\begin{aligned}\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x &\leq \left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x + (b-a)\varepsilon\right) - \left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - (b-a)\varepsilon\right)\\ &\leq 2(b-a)\varepsilon.\end{aligned}$$

Como ε es arbitrario, obtenemos que ambos valores coinciden y por lo tanto f es Riemman integrable.

La misma desigualdad anterior muestra que para todo $n \geq N$

$$\left| \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x - \int_a^b f_n(x)\ \mathrm{d}x \right| \leq \varepsilon(b-a).$$

De donde podemos deducir que

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\ \mathrm{d}x.$$

□

Observación 4.5. Un resultado similar es válido en espacios más generales si reemplazamos la integral de Riemman por la integral de Lebesgue con respecto a una medida, aunque no estudiaremos esto en este curso. En ese caso es posible inclusive utilizar la convergencia puntual con hipótesis adicionales, ver teorema de la convergencia dominada (https://en.wikipedia.org/wiki/Dominated_convergence_theorem).

Ejercicio 4.3.8: (difícil) Teorema de Dini

Sea (X, d_X) un espacio métrico compacto y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de funciones $f_n\colon X \to \mathbb{R}$. Suponga que:

1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, f_n es continua.
2. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a una función $f\colon X \to \mathbb{R}$ continua.
3. para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$, $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$. Es decir, la secuencia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona.

Pruebe que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f.

Indicación: Para $\varepsilon > 0$ *defina* $K_n = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$, *demuestre que* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \varnothing$ *y utilice la compacidad.*

La solución del ejercicio anterior puede encontrarse en la prueba del Teorema 7.13 de [Rud76].

4.4. La métrica del supremo para la convergencia uniforme

En esta sección definiremos una métrica en espacios de funciones cuya noción de convergencia coincide con la convergencia uniforme de funciones.

Definición 4.4.1: Métrica del supremo

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos. Definimos el espacio de funciones acotadas entre X e Y como

$$B(X,Y) = \{f\colon X \to Y \mid f \text{ es acotada }\}.$$

definimos también la métrica $d_\infty\colon B(X,Y) \times B(X,Y) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ como

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in X} d_Y(f(x), g(x)).$$

La letra B del conjunto $B(X,Y)$ proviene del ingles “bounded” que significa “acotado”. A la métrica que acabamos de definir se le denomina **métrica del supremo**. En algunos contextos se le puede denominar también la métrica L^∞ (L-infinito). Formalmente, el nombre L^∞ suele utilizarse en el contexto de espacios de medida y significa algo ligeramente distinto a lo anterior. Esa noción será estudiada en el curso de teoría de la medida.

Ejercicio 4.4.2

Calcule $d_\infty(f,g)$ para los pares de funciones $f\colon X\to Y$, $g\colon X\to Y$ siguientes:

- $X=[0,1]$, $Y=\mathbb{R}$ con la métrica euclidiana, $f=2x$, $g=3x$.
- $X=\mathbb{R}$ con la métrica euclidiana, $Y=\{0,1\}$ con la métrica discreta. f,g dos funciones distintas.

¿qué pasa si en el primer caso tomamos $X=\mathbb{R}$? ¿por qué pedimos que las funciones sean acotadas?

Ejercicio 4.4.3

pruebe que d_∞ es una métrica en $B(X,Y)$.

Ejercicio 4.4.4

Sea $(E,\|\cdot\|_E)$ un espacio vectorial normado. Dada $f\in B(X,E)$, definamos

$$\|f\|_\infty=\sup_{x\in X}\|f(x)\|_E.$$

Pruebe que $\|\cdot\|_\infty$ es una norma en $B(X,E)$ y que

$$d_\infty(f,g)=\|f-g\|_\infty.$$

Proposición 4.4.5

Sean (X,d_X) e (Y,d_Y) dos espacios métricos y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de funciones en $B(X,Y)$. La secuencia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $f\colon X\to Y$ si y solamente si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en la métrica d_∞ a una función $f\in B(X,Y)$.

Demostración. Supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en la métrica d_∞ a una función $f\in B(X,Y)$, eso quiere decir que para todo $\varepsilon>0$ existe $N\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n\geq N$

$$d_\infty(f,f_n)=\sup_{x\in X}d_Y(f(x),f_n(x))\leq\varepsilon$$

En particular, para todo $x\in X$ $d_Y(f(x),f_n(x))\leq\varepsilon$. Esto significa que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f.

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f entonces para todo $\varepsilon>0$ existe $N\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n\geq N$ y $x\in X$

$$d_Y(f(x),f_n(x))\leq\varepsilon.$$

En particular $\sup_{x\in X}d_Y(f(x),f_n(x))\leq\varepsilon$. Sólo falta demostrar que $f\in B(X,Y)$, pero ya vimos la clase pasada que el límite uniforme de funciones acotadas es acotada. $\square$

Hemos demostrado que, para funciones acotadas, la convergencia uniforme de funciones está dictada por una métrica en un espacio de funciones, entonces podemos pensar abstractamente en el límite uniforme de funciones, como un límite de sucesiones en un espacio métrico.

Ejercicio 4.4.6

Muestre que si (Y, d_Y) es completo, entonces el espacio de funciones acotadas $B(X, Y)$ con la métrica del supremo es completo.

Definición 4.4.7: Espacio de funciones continuas

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos. Definimos el espacio de funciones continuas entre X e Y como

$$C(X, Y) = \{f : X \to Y \ \mid \ f \text{ es continua } \}.$$

Lamentablemente, la métrica d_∞ no está bien definida para funciones continuas en general.

Ejercicio 4.4.8

Construya dos funciones continuas $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que la distancia del supremo entre ellas no esté bien definida.

Definición 4.4.9: Espacio de funciones continuas y acotadas

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos. Definimos el espacio de funciones continuas acotadas $C_b(X, Y)$ entre X e Y como

$$C_b(X, Y) = C(X, Y) \cap B(X, Y) = \{f : X \to Y \ \mid \ f \text{ es continua y acotada } \}.$$

Dotamos a $C_b(X, Y)$ de la métrica d_∞ heredada de $B(X, Y)$.

Observación 4.6. $C_b(X, Y)$ es un subconjunto cerrado de $B(X, Y)$. En efecto, dada una sucesión convergente de funciones en $C_b(X, Y)$, cómo el límite uniforme de funciones continuas es continuo, obtenemos que el límite está también en $C_b(X, Y)$.

Observación 4.7. Si (X, d_X) es un espacio métrico compacto, entonces automáticamente toda función continua es acotada, y tenemos que

$$C(X, Y) = C_b(X, Y).$$

Observación 4.8. Hay un truco que permite estudiar $C(X, Y)$ usando la métrica d_∞. Si reemplazamos la métrica d_Y por la métrica $\bar{d}_Y$ dada por:

$$\bar{d}_Y(y_1, y_2) = \min(d_Y(y_1, y_2), 1),$$

entonces artificialmente todas las funciones $f : X \to Y$ se vuelven acotadas y tenemos $C_b(X, Y) = C(X, Y)$. Hay que tener sin embargo en consideración que si bien esto permite extender la convergencia de funciones continuas acotadas a todas las funciones continuas, hemos cambiado la métrica en Y y algunas propiedades cambian (por ejemplo, ahora todo conjunto en Y es acotado).

Teorema 4.4.10: El espacio de funciones continuas acotadas es completo

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) espacios métricos y suponga que (Y, d_Y) es completo. Entonces el espacio $C_b(X, Y)$ con la métrica d_∞ heredada de $B(X, Y)$ es completo.

Demostración. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de Cauchy de funciones $f_n\colon X \to Y$ con la métrica d_∞. Es decir, tenemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq N$, $d_\infty(f_n, f_m) \leq \varepsilon$.

En particular, para todo $\bar{x} \in X$ la secuencia $(f_n(\bar{x}))_{n\in\mathbb{N}}$ también es de Cauchy. Como (Y, d_Y) es completo, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\bar{x}) \text{ existe.}$$

Definamos $f\colon X \to Y$ por $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Es claro que éste es el límite puntual de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Probemos que también es el límite uniforme.

Sea $\eta > 0$, y escojamos $N \in \mathbb{N}$ dado por el hecho de que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una secuencia de Cauchy para $\varepsilon = \frac{\eta}{2}$. Fijemos $n \geq N$ y para cada $x \in X$ tomemos $m(x) \geq N$ tal que $d_Y(f_{m(x)}(x), f(x)) \leq \varepsilon$. Tenemos entonces que para todo $x \in X$, y $n \geq N$

$$d_Y(f(x), f_n(x)) \leq d_Y(f(x), f_{m(x)}(x)) + d_Y(f_{m(x)}(x), f_n(x)) \leq \varepsilon + \varepsilon \leq \eta.$$

Por lo tanto $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f. Como cada f_n es continua y acotada, los resultados de la clase anterior muestran que f es también continua y acotada. Luego $f \in C_b(X, Y)$. □

4.5. Series de funciones y el criterio M de Weierstrass

En lo que sigue asumiremos consideraremos funciones $f\colon X \to \mathbb{R}$ donde (X, d_X) es un espacio métrico y $\mathbb{R}$ está dotado de la métrica euclidiana. Dadas dos funciones $f, g\colon X \to \mathbb{R}$, tiene sentido definir la función $f + g\colon X \to \mathbb{R}$ dada por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ para todo } x \in X.$$

De modo análogo, dadas n funciones $f_1, \dots, f_n\colon X \to \mathbb{R}$ podemos definir su suma $\sum_{k=1}^{n} f_k$ como

$$\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) \text{ para todo } x \in X.$$

En esta sección le daremos sentido a una suma "infinita" de funciones como límite de sus sumas parciales, para hacer ello, requeriremos precisar una noción de convergencia para funciones. Debido a su buen comportamiento con respecto a la continuidad y límites, la convergencia uniforme es una opción adecuada, aunque en algunos casos puede ser conveniente tan solo considerar convergencia puntual.

Ejemplo 4.5.1

En el curso introductorio de cálculo, se define la función exponencial $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ como

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Notemos que si definimos $f_k(x) = \frac{x^k}{k!}$ entonces para todo $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$. Es decir, la secuencia $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ converge puntualmente a $\exp(x)$. ¿converge uniformemente la secuencia $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Definición 4.5.2: Serie

Sea (X, d_X) un espacio métrico y $(f_n)_{n\geq 1}$ una secuencia de funciones $f_n \colon X \to \mathbb{R}$. La **secuencia de sumas parciales** es la secuencia $(S_n)_{n\geq 1}$ de funciones dada por

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Decimos que la **serie** generada por $(f_n)_{n\geq 1}$

- Converge puntualmente si $(S_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente.
- Converge uniformemente si $(S_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente.

En cualquier caso, denotamos la función límite $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$.

Ejercicio 4.5.3

Para $n \geq 1$, sea $f_n = x^n$ definida en $(-1, 1)$. Muestre que la serie generada por la secuencia $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente pero no uniformemente a la función $f \colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x}{1-x}$.

Daremos un criterio útil para mostrar que una serie de funciones acotadas y continuas, es decir, funciones en $C_b(X, \mathbb{R})$, converge uniformemente. Hablamos del criterio M de Weierstrass.

Proposición 4.5.4: Criterio M de Weierstrass

ea (X, d_X) un espacio métrico y $(f_n)_{n\geq 1}$ una secuencia de funciones continuas y acotadas $f_n \colon X \to \mathbb{R}$. Supongamos que el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_\infty \text{ existe.}$$

Entonces la serie generada por $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente.

Notemos que la condición de que $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_\infty$ exista es simplemente la noción de límite usual de secuencias en $\mathbb{R}$, por lo tanto es más fácil de verificar que la convergencia uniforme de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Observación 4.9. Si logramos encontrar una secuencia de números reales no-negativos $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $M = \sum_{n\in\mathbb{N}} M_n < \infty$ y tales que $\|f_n\|_\infty \leq M_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces claramente

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_\infty \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} M_k = M < \infty.$$

Como la secuencia de sumas es monótona, lo anterior es suficiente para aplicar el criterio M de Weierstrass.

Demostración. Debemos mostrar que la secuencia de sumas parciales $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente. Recordemos que $C_b(X, \mathbb{R})$ es el espacio de funciones continuas y acotadas de X en $\mathbb{R}$ con la métrica d_∞. Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in C_b(X, \mathbb{R})$; tenemos que $S_n \in C_b(X, \mathbb{R})$. En particular como el espacio $C_b(X, \mathbb{R})$ es completo por el Teorema 4.4.10, basta probar que la secuencia $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $C_b(X, \mathbb{R})$.

En efecto, como $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\|f_k\|_\infty$ existe, tenemos que para todo $\varepsilon>0$ existe $N\in\mathbb{N}$ tal que para $n,m\geq N$ si $m\geq n$ entonces:

$$\sum_{k=n}^{m}\|f_k\|_\infty\leq\varepsilon.$$

Podemos estimar entonces que para todo $x\in X$:

$$|S_m(x)-S_n(x)|=\left|\sum_{k=n}^{m}f_k(x)\right|\leq\sum_{k=n}^{m}\|f_k\|_\infty\leq\varepsilon.$$

Como la cota no depende de x, concluimos que la secuencia $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $C_b(X,\mathbb{R})$ y en consecuencia converge uniformemente. □

Observación 4.10. El teorema anterior es igualmente válido si reemplazamos $\mathbb{R}$ por $\mathbb{C}$ con la métrica euclidiana. De hecho, sigue siendo válido si reemplazamos $\mathbb{R}$ por un espacio vectorial normado completo (también llamado espacio de Banach). De hecho, veremos en la última sección que una versión generalizada del criterio M de Weierstrass puede ser utilizado para caracterizar la completitud de un espacio vectorial.

Ejercicio 4.5.5

Sea $a\in[0,1)$. Para $n\geq 1$, sea $f_n=x^n$ definida en $[-a,a]$. Muestre que la serie generada por la secuencia $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a la función $f\colon[-a,a]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\frac{x}{1-x}$. Compare este resultado con el ejercicio 1.

Ejercicio 4.5.6

Sea $I=[a,b]$ un intervalo y $f_n\colon I\to\mathbb{R}$ dada por $f_n(x)=\frac{x^n}{n!}$. Use el test M de Weierstrass para demostrar que la serie generada por $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a la función exponencial en I. ¿ Qué pasa si reemplazamos I por $\mathbb{R}$?

Ejercicio 4.5.7: Una curva de Peano

El objetivo de este problema, es construir una función continua y sobreyectiva $\Phi\colon[0,1]\to[0,1]^2$. Por definición este homeomorfismo es una curva, y éste tipo de curvas se suelen denominar **curvas de Peano** o **curvas que recubren el plano**, en honor al primer ejemplo de una curva de este estilo definida por Peano. En este problema daremos un ejemplo más sencillo que fue presentado por I.J. Schoenberg.

1. Muestre que existe una función continua $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que para todo $t\in\mathbb{R}$
   a) $f(t)\in[0,1]$,
   b) $f(t+2)=f(t)$,
   c) $f(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t\in\left(0,\frac{1}{3}\right),\\ 1 & \text{si } t\in\left(\frac{2}{3},1\right).\end{cases}$
2. Sea f la función del punto anterior. Definamos $\Phi\colon[0,1]\to[0,1]^2$ por

$$\Phi(t)=(x(t),y(t)),$$

donde

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(3^{2n-1}t), \qquad y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(3^{2n}t).$$

Muestre que la función Φ está bien definida y es continua. Es decir, que las series que definen $x(t)$ e $y(t)$ convergen uniformemente para $t \in [0,1]$.

3. Muestre que la función Φ es sobreyectiva.

Indicación: Todo real $c \in [0,1]$ puede representarse en binario como

$$c = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} c_n,$$

donde $(c_n)_{n\geq 1}$ es una secuencia en $\{0,1\}$. En particular, si se suponepone dos de estas secuencias (una en las posiciones pares y otra en las posiciones impares), existe una secuencia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\{0,1\}$ tal que $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$ puede representarse en binario como

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} a_{2n-1} \qquad y_0 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} a_{2n}.$$

Basta entonces que demuestre que para toda secuencia $(a_n)_{n\geq 1}$ en $\{0,1\}$ existe $t \in [0,1]$ tal que

$$a_n = f(3^n t).$$

Ejercicio 4.5.8: La curva de Peano no puede ser inyectiva

Considere un espacio métrico (X,d). Decimos que $x_0 \in X$ es un **punto de corte** si X es conexo pero $X \setminus \{x_0\}$ no lo es.

- Muestre que $I = [0,1]$ con la métrica euclidiana admite un punto de corte pero que $D = [0,1]^2$ con la métrica euclidiana no admite punto de corte.
- Muestre que si dos espacios métricos son homeomorfos, uno admite un punto de corte si y solamente si el otro también admite un punto de corte.
- Concluya que $I = [0,1]$ e $D = [0,1]^2$ con las métricas euclidianas no son homeomorfos, y que por lo tanto ninguna curva de Peano (función sobreyectiva continua) $\varphi\colon I \to D$ puede ser inyectiva.

4.6. Convergencia uniforme y diferenciabilidad

Comenzaremos con una aplicación interesante del criterio M de Weierstrass. Recordemos que una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $x_0 \in \mathbb{R}$ si el límite

$$\lim_{\delta \to 0, \mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{f(x_0+\delta) - f(x_0)}{\delta} \quad \text{existe .}$$

Teorema 4.6.1: Existencia de funciones continuas no diferenciables en ningún punto

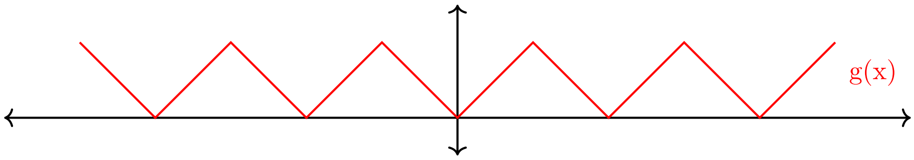
Existe una función continua y acotada $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que no es diferenciable en ningún punto.

La demostración que presentaremos es una simplificación de la prueba original de Weierstrass. Esta puede encontrarse en su versión original en [Rud76].

Demostración. Consideremos primero la función $g\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} x - n & \text{si } x \in [n, n+1] \text{ para } n \text{ par} \\ 1 + n - x & \text{si } x \in [n, n+1] \text{ para } n \text{ impar.} \end{cases}$$

En otras palabras, es la función tal que $g(x) = |x|$ en $[-1,1]$ extendida periódicamente de modo tal que $g(x) = g(x+2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Es claro que g es una función continua y acotada con $\|g\|_\infty = 1$.



Notemos también que la función g satisface que $|g(x) - g(y)| \leq |x - y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Consideremos la secuencia de funciones continuas y acotadas $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$f_n(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^n g(4^n x).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\|f_n\|_\infty = \left(\frac{3}{4}\right)^n \|g\|_\infty = \left(\frac{3}{4}\right)^n$. Tenemos entonces que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4.$$

Por el criterio M de Weierstrass, tenemos que la serie generada por $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente. Podemos entonces definir

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k g(4^k x).$$

Como f es límite de funciones continuas y acotadas, tenemos que también es continua y acotada.

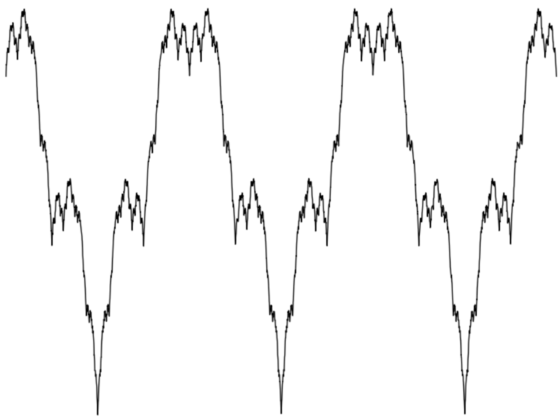


Figura 1. Una aproximación de la función f.

Para reproducir la imagen anterior, se puede correr el código siguiente en SAGE. Recomendamos jugar con los parámetros del código para obtener distintas imágenes y entender el comportamiento de la función.

```
....: f(x) = abs(2*(((((x-1)/2)-floor((x-1)/2))-(1/2))));
....: n = 7;
....: g(x) = 0
```

```
....: for i in range(n):
....:     g(x) = g(x) + (3/4)^(-i)*f((4^i)*(x))
....: plot(g,-3,3, color ='black', axes=False)
```

Mostremos que f no es diferenciable. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ y tomemos un valor $\delta_m \in \{-\frac{1}{2}4^{-m}, \frac{1}{2}4^{-m}\}$ tal que no exista ningún entero contenido estrictamente entre $4^m x_0$ y $4^m(x_0 + \delta_m)$. Notemos que siempre es posible hacer esto, ya que la distancia entre ambos valores es $\frac{1}{2}$.

Sea ahora $n \in \mathbb{N}$ y definamos

$$\gamma_n = \frac{g(4^n(x_0 + \delta_m)) - g(4^n x_0)}{\delta_m}.$$

- Si $n > m$, entonces $4^n\delta_m$ es un entero par y $g(4^n(x_0 + \delta_m)) = g(4^n x_0)$, deducimos entonces que $\gamma_n = 0$.
- Si $n < m$, podemos usar que $|g(x)-g(y)| \leq |x-y|$, de donde obtenemos que $|\gamma_n| \leq \frac{|4^n\delta_m|}{\delta_m} = 4^n$.
- Si $n = m$, entonces como no existe ningún entero contenido estrictamente entre $4^m x_0$ y $4^m(x_0+\delta_m)$. Se sigue que

$$\gamma_m = \frac{g(4^n(x_0 + \delta_m)) - g(4^n x_0)}{\delta_m} = \frac{4^m(x_0 + \delta_m) - 4^m x_0}{\delta_m} = 4^m.$$

Ahora analizaremos el límite deseado a través de la secuencia $(\delta_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x_0 + \delta_m) - f(x_0)}{\delta_m}\right| &= \left|\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^k \frac{g(4^k(x_0 + \delta_m)) - g(4^k x_0))}{\delta_m}\right| \\ &= \left|\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^k \gamma_k\right| \\ &= \left|\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{3}{4}\right)^k \gamma_k\right|\end{aligned}$$

Luego, obtenemos que

$$\left|\frac{f(x_0 + \delta_m) - f(x_0)}{\delta_m}\right| \geq \left(\frac{3}{4}\right)^m |\gamma_m| - \sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^k |\gamma_k| \geq 3^m - \sum_{k=0}^{m-1} 3^k = 3^m - \frac{3^m - 1}{2} \geq \frac{3^m + 1}{2}.$$

Si tomamos $m \to \infty$, entonces δ_m converge a 0 pero $\left|\frac{f(x_0+\delta_m)-f(x_0)}{\delta_m}\right|$ diverge, por lo cual f no puede ser diferenciable en x_0. Como elegimos x_0 de manera arbitraria, concluimos que f no es diferenciable en ningún punto. □

Observación 4.11. Históricamente, el primer ejemplo de función sin derivada en ningún punto fue dado por Weierstrass y es muy similar al anterior. Está dado por

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$$

Donde $a \in (0, 1)$ y b es un entero impar que satisface:

$$ab > 1 + \frac{3\pi}{2}.$$

La prueba en el ejemplo de Weierstrass es muy similar, aunque depende de cotas un poco más finas. La ventaja de su ejemplo es que la función $g(x)$ en su caso es diferenciable, y luego muestra algo más fuerte.

Teorema 4.6.2: Convergencia uniforme no preserva diferenciabilidad

El límite uniforme de funciones acotadas, continuas y diferenciables puede ser una función que no sea diferenciable en ningún punto

Es decir, el límite uniforme de funciones diferenciables no tiene por qué ser diferenciable, al extremo que podría no ser diferenciable en ningún punto.

También podemos notar en nuestra construcción, que si bien cada serie parcial es diferenciable, los valores de las derivadas en cualquier punto no están puntualmente acotados. Ejemplifiquemos esto con un caso más simple.

Ejemplo 4.6.3

Considere $(f_n)_{n\geq 1}$ donde $f_n\colon [0,2\pi]\to\mathbb{R}$ está dada por

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sin(nx)$$

Es claro que $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{n}}$ y que por lo tanto la secuencia $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a la función constante $f=0$. Consideremos la secuencia $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ de derivadas

$$f_n'(x) = \sqrt{n}\cos(nx).$$

Si consideramos $f_n'(0)=\sqrt{n}$ tenemos que la secuencia $(f_n'(0))_{n\geq 1}$ diverge, por lo cual ni siquiera el límite puntual existe en $x=0$.

El ejemplo anterior, junto con el ejemplo de Weierstrass, podría llevarnos a pensar que quizás basta con pedir que la secuencia de derivadas (f_n') sea uniformemente acotada. El siguiente ejemplo muestra que tampoco eso es suficiente para asegurar la diferenciabilidad del límite uniforme.

Ejemplo 4.6.4

Considere $(f_n)_{n\geq 1}$ donde $f_n\colon [-1,1]\to\mathbb{R}$ está dada por

$$f_n(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}.$$

No es difícil demostrar (ejercicio) que la secuencia $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a la función $f\colon[-1,1]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=|x|$, que no es diferenciable en $x=0$. También es claro que

$$\|f_n\|_\infty = \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} \leq 2.$$

Por otro lado, cada f_n es diferenciable en todo $[-1,1]$ con valor

$$f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}}.$$

Luego $f_n'(0)=0$ para todo $n\in\mathbb{N}$, pero f no es diferenciable en 0.

Los ejemplos anteriores muestran que para obtener un teorema que relacione la diferenciabilidad con la convergencia uniforme es necesario pedir hipótesis adicionales. El siguiente resultado entrega condiciones suficientes para asegurar aquello.

Teorema 4.6.5: Condiciones para preservar diferenciabilidad

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de funciones diferenciables $f_n\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ tal que existe $x_0\in[a,b]$ que satisface que $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Si $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente, entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también converge uniformemente a una función diferenciable f tal que f' es el límite uniforme de $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$.

Demostración. Recordemos el teorema del valor medio: para toda función $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b) existe un valor $c\in(a,b)$ tal que

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Sea $\varepsilon>0$. Como $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, existe $N_1\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n,m\geq N_1$ entonces

$$|f_n(x_0)-f_m(x_0)|\leq\frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otro lado, como $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente, existe $N_2\in\mathbb{N}$ tal que para $n,m\geq N_2$ y $x\in[a,b]$

$$|f_n'(x)-f_m'(x)|\leq\frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Tomemos $N=\max(N_1,N_2)$ y $n,m\geq N$ para que ambas relaciones anteriores sean ciertas. Aplicando el teorema del valor medio a la función diferenciable f_n-f_m en $[x_1,x_2]$ para valores $a\leq x_1<x_2\leq b$ obtenemos que existe $c\in(a,b)$ tal que:

$$\frac{f_n(x_2)-f_m(x_2)-(f_n(x_1)-f_m(x_1))}{x_2-x_1}=f_n'(c)-f_m'(c).$$

Usando las cotas anteriores tenemos que

$$|f_n(x_2)-f_m(x_2)-f_n(x_1)+f_m(x_1)|=|x_2-x_1||f_n'(c)-f_m'(c)|\leq\frac{\varepsilon|x_2-x_1|}{2(b-a)}\leq\frac{\varepsilon}{2}.$$

Reemplazando uno de los valores x_1,x_2 por x_0 y dejando al otro ser un $x\in[a,b]$ arbitrario obtenemos que

$$|f_n(x)-f_m(x)|\leq|f_n(x)-f_m(x)-f_n(x_0)+f_m(x_0)|+|f_n(x_0)-f_m(x_0)|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Como x es arbitrario, esto implica que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una secuencia de Cauchy. Como $\mathbb{R}$ es completo, concluimos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a una función $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$.

Fijamos ahora $\bar{x}\in[a,b]$ y definamos las funciones auxiliares

$$\varphi_n(x)=\frac{f_n(x)-f_n(\bar{x})}{x-\bar{x}}\qquad\varphi(x)=\frac{f(x)-f(\bar{x})}{x-\bar{x}},$$

que toman valores en $[a,b]\setminus\{\bar{x}\}$. Como cada f_n es diferenciable, obtenemos por definición que

$$f_n'(\bar{x})=\lim_{x\to\bar{x},x\in[a,b]\setminus\{\bar{x}\}}\varphi_n(x).$$

Podemos entonces extender la definición de φ_n al intervalo $[a,b]$ fijando $\varphi_n(\bar{x})=f_n'(\bar{x})$. De este modo φ_n es continua.

Para todo $x\in[a,b]\setminus\{x\}$, tenemos que si $n,m\geq N$:

$$|\varphi_n(x)-\varphi_m(x)|=\frac{|f_n(x)-f_n(\bar{x})-(f_m(x)-f_m(\bar{x}))|}{|x-\bar{x}|}\leq\frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Para $\bar{x}$ tenemos que:

$$|\varphi_n(\bar{x})-\varphi_m(\bar{x})|=|f_n'(\bar{x})-f_m'(\bar{x})\leq\frac{\varepsilon}{2}.$$

Luego $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es también una secuencia de Cauchy en $C([a,b],\mathbb{R})$ y por lo tanto converge uniformemente. Como $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ concluímos que φ es el límite uniforme de la secuencia $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Usando el teorema (ver clase 16) que permite intercambiar el límite uniforme con el límite usual obtenemos que para todo $\bar{x} \in X$, el límite $\lim_{x\to\bar{x}, x\in[a,b]\setminus\{\bar{x}\}} \varphi(x)$ existe y satisface

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(\bar{x}) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to\bar{x}, x\in[a,b]\setminus\{\bar{x}\}} \varphi_n(x) = \lim_{x\to\bar{x}, x\in[a,b]\setminus\{\bar{x}\}} \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{x\to\bar{x}, x\in[a,b]\setminus\{\bar{x}\}} \varphi(x) = f'(\bar{x}).$$

Lo cual termina la demostración. □

Observación 4.12. Si asumimos también que cada función f_n' es continua, podemos reemplazar la aplicación del teorema del valor medio por la del teorema fundamental del cálculo y la demostración es un poco más sencilla, ver Teorema 3.7.1 de [Tao16].

Ejercicio 4.6.6

Construir una secuencia de funciones que satisfaga todas las propiedades del teorema salvo que exista $x_0 \in [a,b]$ tal que $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge y tal que la conclusión no sea válida.

4.7. Familias acotadas de funciones y el teorema de Arzelà-Ascoli

En lo que sigue estudiaremos un tópico diferente. Supongamos que tenemos una secuencia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de reales y $M \geq 0$ tal que

$$|x_n| \leq M \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Entonces como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [-M, M]$ que es un conjunto secuencialmente compacto, sabemos que la secuencia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente.

La pregunta que intentaremos responder ahora es: ¿Sucederá lo mismo para sucesiones "acotadas" de funciones en $C([0,1],\mathbb{R})$? Es decir, ¿es verdad que si tengo una secuencia de funciones acotadas con respecto a la métrica del supremo en $C_b(X,\mathbb{R})$ entonces necesariamente estas admiten una subsucesión convergente? Antes de responder esta pregunta, daremos dos nociones sobre qué significa que un conjunto de funciones sea acotado.

Observación 4.13. A los subconjuntos de funciones usualmente se les denomina **familias**. Por lo tanto, cuando hablemos de una familia $\mathcal{F}$ de funciones simplemente se debe interepretar como un conjunto de funciones.

Definición 4.7.1

Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una familia de funciones $f\colon X \to \mathbb{R}$. Decimos que la familia $\mathcal{F}$ es

- **puntualmente acotada** si para todo $x \in X$ existe $M_x \geq 0$ en $\mathbb{R}$ tal que para todo $f \in \mathcal{F}$,
$$|f(x)| \leq M_x.$$
- **uniformemente acotada** si existe $M \geq 0$ en $\mathbb{R}$ tal que para todo $f \in \mathcal{F}$ y $x \in X$,
$$|f(x)| \leq M.$$

Claramente la noción más fuerte es la de ser uniformemente acotada, y esta precisamente corresponde a la noción de conjunto acotado en $C_b(X,\mathbb{R})$ respecto a la métrica d_∞.

Observación 4.14. La definición anterior aplica también a sucesiones al considerarlas como un conjunto de valores en $\mathbb{R}$. Es decir, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es puntualmente acotada si para todo $x \in X$ existe $M_x \geq 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ $|f_n(x)| \leq M_x$. Del mismo modo, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada si existe $M \geq 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$, $|f_n(x)| \leq M$.

Mostraremos que incluso para sucesiones uniformemente acotadas, es posible que no exista ninguna subsucesión uniformemente convergente.

Ejemplo 4.7.2

Considere $(f_n)_{n\geq 1}$ donde $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ esta dada por

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1-nx)^2}.$$

Tenemos que $\|f_n\|_\infty \leq 1$, por lo cual la secuencia es uniformemente acotada. También es claro que para todo $\bar{x} \in [0,1]$ $\lim_{n\to\infty} f_n(\bar{x}) = 0$. Por lo cual si el límite uniforme existiese, debe ser la función constante igual a 0. Sin embargo,

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + (1-\frac{n}{n})^2} = 1.$$

Por lo cual ninguna subsecuencia puede converger uniformemente.

Con el ejemplo anterior, acabamos de mostrar el resultado siguiente.

Teorema 4.7.3: No compacidad de la bola unitaria en $C([0,1],\mathbb{R})$

La bola cerrada de radio 1 no es compacta en $C([0,1],\mathbb{R})$ con la métrica d_∞.

Observación 4.15. También es posible mostrar que existen secuencias $(f_n)_{n\geq 1}$ uniformemente acotadas tales que ni siquiera existen subsecuencias *puntualmente* convergentes. Un ejemplo es la secuencia dada por $f_n\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_n = \sin(nx).$$

Sin embargo, una prueba de eso requiere de herramientas que no estudiaremos en este curso. Se puede encontrar una en el ejemplo 7.20 de [Rud76].

En conclusión, dado que las bolas cerradas y acotadas no son compactas en $C([0,1],\mathbb{R})$ con la métrica d_∞, el concepto de secuencia uniformemente acotada no es suficiente para asegurar la existencia de subsecuencias convergentes. Por esta razón, es interesante entonces preguntarse cuales son los subconjuntos compactos de $(C([0,1],\mathbb{R}), d_\infty)$. De manera equivalente, ¿Qué condiciones debe satisfacer una secuencia de funciones en $C([0,1],\mathbb{R})$ para admitir una subsecuencia uniformemente convergente?

Con el fin de estudiar lo anterior, introduciremos la noción de familia equicontinua de funciones.

Definición 4.7.4: Equicontinuidad

Sean (X,d_X) e (Y,d_Y) espacios métricos y $\mathcal{F}$ un conjunto de funciones $f\colon X \to Y$. Decimos que $\mathcal{F}$ es **equicontinuo** si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda función $f \in \mathcal{F}$ y puntos $x, y \in X$ tales que $d_X(x,y) \leq \delta$ se cumple que

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

Simbólicamente, la familia de funciones $\mathcal{F}$ es equicontinua si y solamente si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in \mathcal{F}, \forall x, y \in X, [d_X(x,y) \leq \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) \leq \varepsilon] .$$

Observación 4.16. Si $\mathcal{F}$ es una familia equicontinua de funciones, entonces toda función $f \in \mathcal{F}$ es uniformemente continua de manera automática

La noción de equicontinuidad indica que no solamente cada función es uniformemente continua, sino que los parámetros de convergencia de cada una de estas funciones pueden ser elegidos de la misma manera. Es decir, las funciones son continuas de manera "equivalente".

Ejercicio 4.7.5

Construya dos secuencias de funciones en $C([0,1], \mathbb{R})$; una que sea equicontinua y una que no lo sea.

Ejercicio 4.7.6

Sea $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Considere la sucesión $(f_n)_{n \geq 1}$ dada por

$$f_n(x) = g(nx) \quad \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, n \geq 1.$$

Muestre que si la familia $(f_n)_{n \geq 1}$ es equicontinua entonces g es constante.

La siguiente proposición muestra que la equicontiniudad es una condición natural para estudiar secuencias convergentes.

Proposición 4.7.7

Sea (K, d_K) un espacio métrico compacto y $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $f_n \in C(K, \mathbb{R})$ que converge uniformemente. Entonces la familia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es equicontinua.

Demostración. Sea $\eta > 0$ y definamos $\varepsilon = \frac{\eta}{3}$. Llamemos f al límite uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Por definición existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$,

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Como K es compacto, para cada $k \in \mathbb{N}$ la función f_k es uniformemente continua, luego existe un $\delta_k > 0$ tal que si $d_K(x,y) \leq \delta_k$ entonces,

$$|f_k(x) - f_k(y)| \leq \varepsilon.$$

Del mismo modo, como el límite uniforme de funciones continuas es continua, f es uniformemente continua y existe un $\delta^* > 0$ tal que si $d_K(x,y) \leq \delta^*$ entonces,

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Definamos $\delta = \min(\delta^*, \delta_0, \ldots, \delta_{N-1})$. Debemos demostrar que para todo $m \in \mathbb{N}$, si $d_K(x,y) \leq \delta$ entonces $|f_m(x) - f_m(y)| \leq \eta$. Si $m < N$ esto es inmediato por la elección de δ. Si $m \geq N$ entonces,

$$|f_m(x) - f_m(y)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| + |f(y) - f_m(y)| \leq 3\varepsilon = \eta.$$

Que es lo que queríamos demostrar $\square$

Ejercicio 4.7.8

Construya una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ equicontinua de funciones $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ sin subsucesión convergente en $(C([0,1],\mathbb{R}), d_\infty)$.

Ya demostramos que en general una sucesión uniformemente acotada no admite subsucesiones puntualmente convergentes. Sin embargo, en el caso en que X es numerable, lo anterior es cierto inclusive suponiendo solo que la sucesión sea puntualmente acotada.

Lema 4.7.9

Sea X un conjunto numerable y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión puntualmente acotada de funciones $f_n\colon X \to \mathbb{R}$. Entonces existe una subsucesión $(f_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge puntualmente.

Demostración. La prueba es un argumento diagonal. Como X es numerable, existe una biyección $\varphi\colon \mathbb{N} \to X$. De éste modo podemos escribir $x_m = \varphi(m)$ y el espacio como $X = \{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$. Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es puntualmente acotada, la secuencia $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $\mathbb{R}$ y entonces admite una subsucesión convergente $(f_{n(k)}(x_0))_{k\in\mathbb{N}}$. Denotemos $f_{k,0} = f_{n(k)}$.

Vamos a definir funciones $f_{k,m}$ para $m \geq 1$ inductivamente de modo tal que la secuencia de funciones $(f_{k,m}(x_m))_{k\in\mathbb{N}}$ converja. Supongamos que hemos definido $f_{k,m-1}$ de este modo para todo $k \in \mathbb{N}$. Cómo la secuencia $(f_{k,m-1}(x_m))_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada, podemos extraer una subsecuencia convergente $(f_{k(\ell),m-1}(x_m))_{\ell\in\mathbb{N}}$. De éste modo definimos $f_{\ell,m} = f_{k(\ell),m-1}$ para todo $\ell \in \mathbb{N}$.

Lo que haremos es extraer una secuencia considerando los términos de la diagonal como en el esquema de acá

$$
\begin{array}{rccccc}
(f_{k,0})_{k\in\mathbb{N}} = & \boxed{f_{0,0}} & f_{1,0} & f_{2,0} & f_{3,0} & \cdots \\
(f_{k,1})_{k\in\mathbb{N}} = & f_{0,1} & \boxed{f_{1,1}} & f_{2,1} & f_{3,1} & \cdots \\
(f_{k,2})_{k\in\mathbb{N}} = & f_{0,2} & f_{1,2} & \boxed{f_{2,2}} & f_{3,2} & \cdots \\
(f_{k,3})_{k\in\mathbb{N}} = & f_{0,3} & f_{1,3} & f_{2,3} & \boxed{f_{3,3}} & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Consideremos la secuencia diagonal $(f_{n,n})_{n\in\mathbb{N}}$. Por construcción, $(f_{n,n})_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsecuencia de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Para todo $m \in \mathbb{N}$, la secuencia $(f_{n,n}(x_m))_{n\geq m}$ es una subsecuencia de $(f_{k,m}(x_m))_{k\in\mathbb{N}}$ y por lo tanto converge. Concluimos que $(f_{n,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente. □

El siguiente teorema da un criterio para caracterizar los conjuntos compactos en $C(K,\mathbb{R})$, cuando (K, d_K) es un espacio métrico compacto.

Teorema 4.7.10: Arzelà-Ascoli

Sea (K, d_K) un espacio métrico compacto y $\mathcal{F} \subseteq C(K,\mathbb{R})$ una familia de funciones. Suponga que $\mathcal{F}$ es equicontinua y puntualmente acotada, entonces:

1. $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada.
2. La clausura de $\mathcal{F}$ es compacta, es decir, toda sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ admite una subsucesión que converge uniformemente.

Observación 4.17. La condición de que la clausura de $\mathcal{F}$ sea compacta se denomina **compacidad relativa**.

Demostración. Sea $\varepsilon = 1$. Cómo $\mathcal{F}$ es equicontinua, existe un $\delta > 0$ tal que para todo $f \in \mathcal{F}$, $x, y \in K$ tales que $d_K(x, y) \leq \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| \leq 1$.

Como K es compacto, existe un $r \in \mathbb{N}$ tal que el recubrimiento $K = \bigcup_{x\in K} \mathring{B}_K(x, \delta)$ admite un subrecubrimiento finito

$$K = \mathring{B}_K(x_1, \delta) \cup \cdots \cup \mathring{B}_K(x_r, \delta).$$

Como $\mathcal{F}$ es puntualmente acotada, para todo x_i con $i \in \{1, \ldots, r\}$ existe una cota $M(x_i) \geq 0$ tal que para todo $f \in \mathcal{F}$, $|f(x_i)| \leq M(x_i)$. Definiendo $M = \text{máx}(M(x_1), \ldots, M(x_r)) + 1$ obtenemos que para todo $f \in \mathcal{F}$ y $x \in K$,

$$|f(x)| \leq \min_{i\in\{1,\ldots,r\}} (|f(x) - f(x_i)| + |f(x_i)|) \leq 1 + \max_{i\in\{1,\ldots,r\}} M(x_i) = M.$$

Obtenemos que la familia $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada.

Para la segunda parte, sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ una sucesión. Debemos mostrar que admite una subsucesión convergente. Para ello, notemos que todo espacio métrico compacto es separable (ver Ejercicio 2.8.5). Sea $D \subseteq K$ numerable y denso. Por el Lema 4.7.9, existe una subsecuencia $(f_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge puntualmente en D. Para simplificar la notación, escribamos $g_k = f_{n(k)}$.

Como $C(K, \mathbb{R})$ es completo, basta demostrar que $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy con respecto a la métrica uniforme.

Dado $\eta > 0$, definimos $\varepsilon = \frac{\eta}{3}$ y sea δ dado por la equicontinuidad de $\mathcal{F}$ (como en la primera parte de la prueba pero ahora con este valor de ε). Considere el conjunto

$$\bigcup_{y\in D} \mathring{B}_K(y, \delta).$$

Como D es denso, el conjunto anterior es todo K. Como K es compacto, existe un $t \in \mathbb{N}$ tal que el cubrimiento anterior admite un subrecubrimiento finito

$$K = \mathring{B}_K(y_1, \delta) \cup \cdots \cup \mathring{B}_K(y_t, \delta).$$

Dado que $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente en D, podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $s \in \{1, \ldots, t\}$ tenemos que si $i, j \geq N$ entonces

$$|g_i(y_s) - g_j(y_s)| \leq \varepsilon.$$

Por otro lado, como $\mathring{B}_K(y_1, \delta) \cup \cdots \cup \mathring{B}_K(y_t, \delta)$ es un recubrimiento de K, para todo $x \in K$ existe $s(x) \in \{1, \ldots, t\}$ tal que $d_K(x, y_{s(x)}) \leq \delta$. De la equicontiniudad de $\mathcal{F}$ obtenemos que para todo $i \in \mathbb{N}$,

$$|g_i(y_{s(x)}) - g_i(x)| \leq \varepsilon.$$

Concluimos que si tomamos $i, j \geq N$ entonces

$$\begin{aligned}
|f_{n(i)}(x) - f_{n(j)}(x)| &= |g_i(x) - g_j(x)| \\
&\leq |g_i(x) - g_i(y_{s(x)})| + |g_i(y_{s(x)}) - g_j(y_{s(x)})| + |g_j(y_{s(x)}) - g_j(x)| \\
&\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = \eta.
\end{aligned}$$

Esto prueba que la sucesión $(f_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, concluimos que converge. □

Es importante destacar que fundamentalmente lo único que usamos de $\mathbb{R}$ en la prueba anterior es que es un espacio completo. Por lo tanto el teorema anterior se extiende a $C(K, Y)$ donde (Y, d) es cualquier espacio métrico completo. Sin embargo es necesario reemplazar la noción de convergencia puntual en el Lema 4.7.9 por algo que haga sentido en un espacio métrico arbitrario. Notemos que lo único que usamos es que la cerradura de un intervalo acotado en $\mathbb{R}$ es compacta, lo anterior motiva la definición siguiente.

Definición 4.7.11

Sean X, Y dos espacios métricos. Decimos que una familia $\mathcal{F}$ de funciones $f\colon K \to Y$ es puntualmente relativamente compacta si para todo $x \in X$ se cumple que $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ es relativamente compacto en Y. Se dice que $\mathcal{F}$ es uniformemente relativamente compacta si $\{f(x) : x \in X, f \in \mathcal{F}\}$ es relativamente compacto en Y.

Notemos que si (Y, d) cumple que toda bola cerrada es compacta, entonces automáticamente toda familia puntualmente acotada es puntualmente relativamente compacta.

Teorema 4.7.12: Arzelà-Ascoli generalizado

Sea (K, d_K) un espacio métrico compacto, (Y, d_Y) un espacio métrico completo y $\mathcal{F} \subseteq C(K, Y)$ una familia de funciones. Suponga que $\mathcal{F}$ es equicontinua y puntualmente relativamente compacta, entonces:

1. $\mathcal{F}$ es uniformemente relativamente compacta.
2. La clausura de $\mathcal{F}$ es compacta.

Dejaremos como ejercicio al lector mostrar la versión de Arzelà-Ascoli generalizado replicando la prueba del caso real.

Ejercicio 4.7.13

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia uniformemente acotada de funciones Riemman-integrables $f_n\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Definamos

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t.$$

Muestre que la secuencia de funciones $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite una subsecuencia que converge uniformemente.

Una aplicación del teorema de Arzelà-Ascoli, es una caracterización de los subconjuntos compactos de $(C(K, \mathbb{R}), d_\infty)$ para todo espacio métrico compacto (K, d_K).

Corolario 4.7.14

Sea (K, d_K) un espacio métrico compacto. Un conjunto $\mathcal{F} \subseteq C(K, \mathbb{R})$ es compacto en la topología dada por la métrica del supremo si y solamente si es cerrado, equicontinuo y puntualmente acotado.

Demostración. Por el teorema de Arzelà-Ascoli, si $\mathcal{F}$ es equicontinuo y puntualmente acotado entonces la clausura de $\mathcal{F}$ es compacta. Si $\mathcal{F}$ es adicionalmente cerrado lo anterior dice que $\mathcal{F}$ es compacto.

Ahora supongamos que $\mathcal{F}$ es compacto. Esto implica directamente que es cerrado y uniformemente acotado, por lo tanto también puntualmente acotado. Mostremos que $\mathcal{F}$ es equicontinuo.

Supongamos que $\mathcal{F}$ no es equicontinuo, luego existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ podemos encontrar $f \in \mathcal{F}$ y $x, y \in K$ tales que $d_K(x, y) \le \delta$ y $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$. Sea $\delta_n = \frac{1}{n}$ y tomemos f_n, x_n, y_n de acuerdo a lo anterior. Considere la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Como $\mathcal{F}$ es compacto, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite una subsucesión convergente. Por lo anterior, esta sucesión no es equicontinua, lo cual contradice el resultado probado la clase anterior de que toda sucesión convergente en $(C(K,\mathbb{R}), d_\infty)$ es equicontinua. □

Ejercicio 4.7.15

Considere $C([0,1],\mathbb{R})$ con la norma del supremo. Considere el subconjunto $C^1([0,1],\mathbb{R})$ de las funciones diferenciables en $C([0,1],\mathbb{R})$.

1. Muestre que $C^1([0,1],\mathbb{R})$ no es cerrado ni acotado en $C([0,1],\mathbb{R})$.
2. Considere ahora $K \subseteq C^1([0,1],\mathbb{R})$ dado por

$$K = \{f \in C^1([0,1],\mathbb{R}) : \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leq 1\}.$$

   Muestre que la cerradura de K es compacta en $C([0,1],\mathbb{R})$.

Ejercicio 4.7.16

Muestre que el teorema de Arzelà-Ascoli sigue siendo válido si consideramos una familia de funciones $\mathcal{F} \subseteq C(K,\mathbb{R}^n)$ para $n \geq 1$.

Ejercicio 4.7.17

Sea $K > 0$. Considere el conjunto $\mathcal{L}_K$ de funciones continuas $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tales que para todo $x, y \in [0,1]$,

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|.$$

Estas funciones se denominan K-Lipschitz. Muestre que el conjunto de todas las funciones en $\mathcal{L}_K$ tal que $f(0) = 0$ es compacto en $C([0,1],\mathbb{R})$ con respecto a la métrica del supremo.

Estudiemos ahora una aplicación del teorema de Arzelà-Ascoli a la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales.

Proposición 4.7.18

Sea $\phi\colon [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y acotada y $c \in \mathbb{R}$. Entonces la ecuación diferencial dada por

$$y'(x) = \phi(x, y(x)), \qquad y(0) = c,$$

admite una solución en $C^1([0,1],\mathbb{R})$.

Demostración. La estrategia es construir una sucesión de funciones $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ que den una solución aproximada y mostrar que admite una subsucesión convergente utilizando el teorema de Arzelà-Ascoli.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Para $k \in \{0, \ldots, n\}$ defina $x_k = \frac{k}{n}$. Sea $f_n \in C([0,1],\mathbb{R})$ que satisfaga lo siguiente:

- $f_n(0) = c$.
- $f_n'(t) = \phi(x_k, f_n(x_k))$ para $t \in (x_k, x_{k+1})$.

Esta función se puede construir iterativamente. Se comienza con $f_n(0) = c$ y luego se define en $[x_0, x_1]$ como la recta con pendiente $\phi(x_0, f_n(x_0))$ que pasa por $(x_0, f_n(0))$. Luego se define en $[x_1, x_2]$ como la recta con pendiente $\phi(x_1, f_n(x_1))$ que pasa por $(x_1, f_n(1))$ y así sucesivamente.

Note que la función f_n es continua, pero no es diferenciable en los puntos x_k. Defina el error de esta función f_n como

$$\Delta_n(t) = \begin{cases} f_n'(t) - \phi(t, f_n(t)) & \text{si } t \notin \{x_0, \dots, x_n\} \\ 0 & \text{si } t \in \{x_0, \dots, x_n\} \end{cases}.$$

De lo anterior, es claro que

$$f_n(t) = c + \int_0^t \left(\phi(t, f_n(t)) + \Delta_n(t)\right) \mathrm{d}t.$$

Como la función ϕ es acotada, existe $M \geq 0$ tal que $\|\phi\|_\infty \leq M$. Consideremos $\Delta_n(t)$. Si $t \in \{x_0, \dots, x_n\}$ claramente $|\Delta_n(t)| = 0$. De lo contrario $|\Delta_n(t)|$ es $|\phi(x_k, f_n(x_k)) - \phi(t, f_n(t))|$ para algún k, y por lo tanto $\|\Delta_n\|_\infty \leq 2M$. Por la expresión integral de f_n obtenemos que $\|f_n\|_\infty \leq 3M + |c|$.

Es decir, la secuencia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada. Por otro lado, tenemos que para todo $x, y \in [0, 1]$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq M|x - y|.$$

Por lo cual la secuencia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es también equicontinua (dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta < \frac{\varepsilon}{M}$.) Usando el teorema de Arzelà-Ascoli obtenemos que existe una subsecuencia $(f_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente a una función continua $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$. Mostremos que f es solución del problema.

Como ϕ es uniformemente continua en el rectángulo $[0, 1] \times [-|c| - M, M + |c|]$, tenemos que la secuencia de funciones dadas por $(\phi(t, f_{n(k)}(t)))_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a la función dada por $\phi(t, f(t))$ en $[0, 1]$. Por otro lado $\Delta_n(t) = \phi(x_k, f_n(x_k)) - \phi(t, f_n(t))$ para $t \in (x_k, x_{k+1})$. De la continuidad uniforme de ϕ obtenemos que la secuencia $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a 0.

Finalmente, tenemos que f es el límite uniforme de la expresión integral

$$f = \lim_{n\to\infty} f_{n(k)}(t) = \lim_{n\to\infty} c + \int_0^t \big(\phi(t, f_{n(k)}(t)) + \Delta_{n(k)}(t)\big) \mathrm{d}t.$$

Como el límite uniforme de funciones se puede intercambiar con la integral, obtenemos que

$$f = c + \int_0^x \lim_{n\to\infty} \big(\phi(t, f_{n(k)}(t)) + \Delta_{n(k)}(t)\big) = c + \int_0^x \phi(t, f(t))\mathrm{d}t.$$

De donde obtenemos que $f(0) = 0$ y $f'(t) = \phi(t, f(t))$. □

El teorema de Arzelà-Ascoli es válido también en el contexto donde el espacio topológico de partida no es métrico. Para poder reescribir la prueba que dimos una hipótesis natural es que el espacio topológico sea separable. Sin embargo, es posible demostrar el teorema de Arzelà-Ascoli sin utilizar la separabilidad del espacio, y tan solo basta que sea Hausdorff compacto, aunque la complejidad de la prueba aumenta bastante.

Observación 4.18. Recordemos que un espacio topológico X es Hausdorff si para cada par de puntos x, y en el espacio existan dos abiertos disjuntos U_x y U_y tales que $x \in U_x$ e $y \in U_y$.

Teorema 4.7.19: Arzelà-Ascoli para espacios Hausdorff

Sea X un espacio topológico Hausdorff compacto y sea Y un espacio métrico completo. Una familia de funciones $\mathcal{F} \subseteq C(X,Y)$ es relativamente compacta con respecto a la convergencia uniforme si y solamente si es equicontinua y puntualmente acotada.

Una demostración de este teorema en un caso aún más general (donde Y no es necesariamente un espacio métrico) puede encontrarse en la sección 6.7 de [Kel75]. En ese caso se utiliza una generalización de la topología dada por la métrica del supremo llamada la topología **compacta-abierta**.

4.8. El teorema de Weierstrass

Cuando consideramos un espacio métrico, es a menudo útil estudiar sus subespacios densos. Por ejemplo, para conocer los valores de una función continua $f\colon X \to \mathbb{R}$, basta conocer los valores de f en un subconjunto denso de X. El teorema de Weierstrass entrega de manera explícita un subconjunto denso de $C([0,1],\mathbb{R})$ o más generalmente $C([a,b],\mathbb{C})$ para cualquier intervalo cerrado $[a,b]$.

Recordemos brevemente la definición de polinomio. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Un polinomio es una función $P\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ que se puede escribir de la forma:

$$P(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k,$$

para un $N \in \mathbb{N}$, y valores $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{K}$. El conjunto de todos los polinomios con coeficientes en un cuerpo $\mathbb{K}$ se denota por $\mathbb{K}[x]$.

Ejemplo 4.8.1

- $P(x) = x^2 + x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$.
- $P(x) = \pi x^7 + e x^2 \in \mathbb{R}[x]$.
- $P(z) = i z^2 - 3z + e \in \mathbb{C}[x]$.

Teorema 4.8.2: Weierstrass

Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. La familia $\mathcal{P}$ de polinomios $P \in \mathbb{K}[x]$ es densa en $C([0,1],\mathbb{K})$.

En otras palabras, para todo $f \in C([0,1],\mathbb{C})$ existe una secuencia $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polinomios, cuya restricción a $[0,1]$ converge uniformemente a f. Si la función f toma valores reales entonces los polinomios pueden tomarse a coeficientes reales.

Observación 4.19. El teorema anterior es válido si reemplazamos $[0,1]$ por cualquier intervalo cerrado $[a,b]$. Basta reemplazar $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ por $g(x) = f(a+(b-a)x)$ y aplicar el teorema sobre g. Haciendo una transformación similar se puede recuperar la secuencia de polinomios que aproximan f.

Ejemplo 4.8.3

Sea $\exp\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ la función exponencial. Si definimos para $n \in \mathbb{N}$

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k,$$

entonces la secuencia de polinomios $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a la función exp.

A continuación demostraremos el teorema de Weierstrass. La prueba que presentaremos fue sacada del teorema 7.26 de [Rud76]. La idea fundamental de la prueba es muy utilizada en el análisis de EDP y es la de utilizar una **convolución** con una secuencia de funciones que se concentran en un punto. Este objeto límite se puede definir (no lo haremos en este curso) como una distribución límite llamada **delta de dirac**. La técnica anterior permite recuperar en el límite el valor de la función original, al mismo tiempo ganando buenas propiedades para las funciones de la secuencia, como por ejemplo, ser polinomios o hacerlas diferenciables.

No estudiaremos la técnica descrita en el párrafo anterior en detalle pero recomendamos prestar atención en la prueba a los lugares donde se utiliza.

Demostración. Sea $f \in C([0,1],\mathbb{C})$. Debemos demostrar que existe una secuencia $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polinomios que converge uniformemente a f. Notemos primero que podemos suponer que $f(0) = f(1) = 0$, en efecto, si tomamos

$$g(x) = f(x) - f(0) - x(f(1) - f(0)),$$

entonces $g(0) = g(1) = 0$. Si demostramos el teorema para g entonces podemos encontrar una secuencia de polinomios que aproxime uniformemente a f, dado que $f - g$ es un polinomio. Extendamos la función f a $\mathbb{R}$ definiendo $f(x) = 0$ si $x \notin [0,1]$, de este modo f sigue siendo uniformemente continua y acotada.

Sea $n \geq 1$ y definamos $Q_n = c_n(1-x^2)^n$ donde c_n está dada por

$$c_n = \left(\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n \,\mathrm{d}x\right)^{-1}$$

de modo tal que $\int_{-1}^{1} Q_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

En este punto, recomendamos fuertemente al lector o lectora utilizar algún software para graficar las funciones Q_n. De este modo podrá adquirir intuición sobre sus propiedades.

Antes de definir la convolución probaremos una desigualdad que será útil. Consideremos la función $g(x) = (1-x^2)^n - 1 + nx^2$. Esta función es diferenciable en $\mathbb{R}$, $g(0) = 0$ y su derivada

$$g'(x) = 2nx(1 - (1-x^2)^{n-1}) \text{ es positiva en } (0,1).$$

Luego obtenemos que $(1-x^2)^n \geq 1 - nx^2$ en $(0,1)$. Utilizaremos esta desigualdad para estimar el valor de c_n.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n \,\mathrm{d}x &= 2\int_{0}^{1} (1-x^2)^n \,\mathrm{d}x \\
&\geq 2\int_{0}^{(\sqrt{n})^{-1}} (1-x^2)^n \,\mathrm{d}x \\
&\geq 2\int_{0}^{(\sqrt{n})^{-1}} 1 - nx^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\sqrt{n}} - 2n\frac{1}{3\sqrt{n}^3} = \frac{4}{3\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

De donde obtenemos que $c_n < \sqrt{n}$. Es decir, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$Q_n(x) \leq \sqrt{n}(1-x^2)^n.$$

En particular, para todo $a > 0$, tenemos que $(Q_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a 0 en $[a,1]$. Ahora definamos la función $P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)\,\mathrm{d}t$. Utilizando que $f = 0$ fuera de $(0,1)$ y aplicando el cambio de variable $s = t + x$ obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= \int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_{-x}^{1-x} f(x+t)Q_n(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_{0}^{1} f(s)Q_n(x+s)\ \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

El último término de la igualdad muestra $P_n(x)$ es un polinomio, y sus coeficientes son reales si f toma valores reales. Probaremos ahora que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f.

Sea $\varepsilon > 0$. Por continuidad de f existe $\delta > 0$ tal que si $|x-y| \leq \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Además como $[0,1]$ es compacto existe $M \geq 0$ tal que $\|f\|_\infty \leq M$. Obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
|P_n(x) - f(x)| &= \left|\int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)\ \mathrm{d}t - f(x)\right| \\
&= \left|\int_{-1}^{1} (f(x+t) - f(x))Q_n(t)\ \mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_{-1}^{1} |f(x+t) - f(x)|Q_n(t)\mathrm{d}t \\
&\leq 2M\int_{-1}^{-\frac{\delta}{2}} Q_n(t)\ \mathrm{d}t + \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} |f(x+t) - f(x)|Q_n(t)\ \mathrm{d}t + 2M\int_{\frac{\delta}{2}}^{1} Q_n(t)\ \mathrm{d}t \\
&\leq 4M\int_{\frac{\delta}{2}}^{1} \sqrt{n}(1-x^2)^n + \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} Q_n(t)\ \mathrm{d}t \\
&\leq 4M\sqrt{n}(1-\frac{\delta^2}{4})^n + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Tomemos $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que para todo $n \geq N$ entonces $4M\sqrt{n}(1-\frac{\delta^2}{4})^n \leq \frac{\varepsilon}{2}$. De este modo para $n \geq N$,

$$\sup_{x\in[0,1]} |P_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Esto muestra que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f. □

A continuación veremos algunas aplicaciones del teorema de Weierstrass

Corolario 4.8.4

El espacio $C([0,1],\mathbb{R})$ con la métrica d_∞ es separable.

Demostración. Por el teorema de Weierstrass, la familia $\mathcal{P}$ de polinomios a coeficientes en $\mathbb{R}$ es densa en $C([0,1],\mathbb{R})$. Bastará demostrar que todo polinomio en $[0,1]$ con coeficientes en $\mathbb{R}$ puede aproximarse uniformemente por un polinomio en $[0,1]$ con coeficientes en $\mathbb{Q}$ (Ejercicio: mostrar esta afirmación usando un argumento diagonal).

En efecto, notamos que si $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ donde $a_k \in \mathbb{R}$ y tomamos $q_k \in \mathbb{Q}$ tales que $|q_k - a_k| \leq \delta$, entonces si definimos el polinomio a coeficientes racionales $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} q_k x^k$ obtenemos que para cada $x \in [0,1]$,

$$|P(x) - Q(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k - q_k| x^k \leq \delta n.$$

Luego para todo polinomio $P(x)$ de grado $\deg(P)$ con coeficientes a_k, y para todo $\varepsilon > 0$, si elegimos un polinomio a coeficientes racionales q_k tal que $|q_k - a_k| \leq \frac{\varepsilon}{\deg(P)}$, tenemos que $\|P - Q\|_\infty \leq \varepsilon$. Con esto obtenemos el resultado. □

Ejercicio 4.8.5

Sea $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ tal que

$$\int_0^1 f(x)x^n \, \mathrm{d}x = 0. \text{ para todo } n \geq 0.$$

Muestre que f es la función constante igual a 0.

Ejercicio 4.8.6

Sea $T\colon C([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ una función continua que cumple:

- $T(cf) = cT(f)$ para $c \in \mathbb{R}$, $f \in C([0,1],\mathbb{R})$.
- $T(f+g) = T(f) + T(g)$ para $f, g \in C([0,1],\mathbb{R})$.

En otras palabras, T es una función lineal continua. Suponga que T satisface además que

- $T(g) = 2T(f)$ para toda $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ donde $g = xf$ denota la función tal que $g(x) = xf(x)$.
- $T(h) = 0$ para toda función constante $h \in C([0,1],\mathbb{R})$, es decir, tal que existe $C \in \mathbb{R}$ con $h(x) = C$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Muestre que T es la función constante igual a 0.

4.9. El teorema de Stone-Weierstrass

Una pregunta interesante es: ¿Qué tienen de especial los polinomios que los constituyen una familia densa en $C([0,1],\mathbb{R})$? La prueba que presentamos utiliza fuertemente la estructura polinomial de la secuencia $Q_n = c_n(1-x^2)^n$ de aproximantes de la delta de dirac, pero uno podría imaginar una demostración en un ámbito un poco más general, que proporcione a la vez más familias densas y que permita cambiar el espacio de partida a un espacio métrico compacto arbitrario. Para ello estudiaremos la noción de álgebra de funciones.

Definición 4.9.1: Álgebra de funciones

Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Una familia $\mathcal{A}$ de funciones de un conjunto X en $\mathbb{K}$ se denomina un **álgebra** si para todo $f, g \in \mathcal{A}$ y $c \in \mathbb{K}$:

1. $f + g \in \mathcal{A}$.
2. $fg \in \mathcal{A}$.
3. $cf \in \mathcal{A}$.

Si (X,d) es un espacio métrico y $\mathcal{A} \subseteq C(X,\mathbb{K})$ tiene la propiedad de que el límite uniforme de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ pertenece a $\mathcal{A}$, decimos que es **uniformemente cerrada**.

Ejemplo 4.9.2

Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. La familia $\mathbb{K}[x]$ de polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ es un álgebra. El teorema de Weierstrass dice que su cerradura uniforme es el espacio de funciones continuas $C([0,1],\mathbb{K})$.

Ejercicio 4.9.3

Muestre que la cerradura en la métrica del supremo de un álgebra $\mathcal{A}$, es un álgebra uniformemente cerrada. *Nota: acá el hecho de que la cerradura sea uniformemente cerrada es trivial, lo que se pide demostrar es que es también un álgebra.*

Definición 4.9.4: Propiedades de álgebras

ea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de funciones de un conjunto X en $\mathbb{K}$. Decimos que:

- $\mathcal{A}$ **separa puntos**, si para cada par de puntos distintos $x_1, x_2 \in X$ existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- $\mathcal{A}$ **no se anula**, si para cada $x \in X$ existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) \neq 0$.

En general, para cualquier espacio métrico (X, d_X) y par de puntos distintos $x, y \in X$, se puede encontrar una función continua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$ (esto es el lema de Uryhson, ver Lema 3.5.1). Luego las condiciones anteriores de que un álgebra separe puntos y no se anule son necesarias.

Ejercicio 4.9.5

En este ejercicio consideremos álgebras de funciones en $[-1,1]$ con valores en $\mathbb{R}$.

1. Muestre que el álgebra de polinomios $\mathbb{R}[x]$ separa puntos y no se anula.
2. Muestre que el conjunto de polinomios pares, es decir, de funciones de la forma
$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{2k}.$$
es un álgebra que no se anula, pero que no separa puntos.
3. Muestre que el conjunto de polinomios sin constante, es decir, de funciones de la forma
$$Q(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^{k}.$$
es un álgebra que separa puntos pero que se anula en $x = 0$.

Finalmente, pruebe que las álgebras de los ejemplos 2 y 3 no son densas en $C([-1,1], \mathbb{R})$.

Ejercicio 4.9.6

Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ dos subálgebras de $C(X, \mathbb{R})$ tales que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$.

1. Muestre que si $\mathcal{A}$ no se anula, entonces $\mathcal{A}'$ no se anula.
2. Muestre que si $\mathcal{A}$ separa puntos, entonces $\mathcal{A}'$ separa puntos.
3. Use lo anterior para mostrar que el álgebra $C^\infty([0,1], \mathbb{R})$ de funciones infinitamente diferenciables separa puntos y no se anula.

Lo que mostraremos es que estas condiciones no solo son necesarias para que un álgebra sea densa en $C([0,1], \mathbb{R})$, sino que además son suficientes. Para ello, primero mostraremos un resultado preliminar que nos será de utilidad.

Proposición 4.9.7

Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de funciones de un espacio (X, d_X) en $\mathbb{K}$. Supongamos que $\mathcal{A}$ no se anula y que separa puntos. Entonces para todo par $x_1, x_2 \in X$ distinto y $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$ existe $f \in \mathcal{A}$ tal que:

$$f(x_1) = c_1, \qquad f(x_2) = c_2.$$

Demostración. Como $\mathcal{A}$ separa puntos, existe $g \in \mathcal{A}$ tal que

$$g(x_1) \neq g(x_2).$$

Por otro lado, como $\mathcal{A}$ no se anula, existen $h, k \in \mathcal{A}$ tales que

$$h(x_1) \neq 0, \qquad k(x_2) \neq 0.$$

Definamos

$$u = kg - g(x_1)k, \qquad v = hg - g(x_2)h.$$

Como $\mathcal{A}$ es álgebra, tenemos que $u, v \in \mathcal{A}$. Notemos que $u(x_1) = 0$ y $u(x_2) \neq 0$; y que $v(x_1) \neq 0$ y $v(x_2) = 0$. Basta definir

$$f = \frac{c_1 v}{v(x_1)} + \frac{c_2 u}{u(x_2)}.$$

Cómo $\mathcal{A}$ es álgebra, obtenemos que $f \in \mathcal{A}$. Es directo verificar que f satisface las propiedades requeridas. □

Teorema 4.9.8: Stone-Weierstrass (álgebras con valores en $\mathbb{R}$)

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de funciones continuas de un espacio compacto (K, d_K) en $\mathbb{R}$ que no se anula y que separa puntos. Entonces $\mathcal{A}$ es denso en $(C(K, \mathbb{R}), d_\infty)$.

En otras palabras, si un álgebra de funciones continuas $f \colon K \to \mathbb{R}$ separa puntos y no se anula, entonces su cerradura uniforme es el espacio de todas las funciones continuas en K con valores reales. Esto es el análogo del teorema de Weierstrass para espacio métricos compactos.

Demostración. La demostración se separará en cuatro pasos. Sea $\mathcal{B}$ la cerradura uniforme de $\mathcal{A}$ y notemos que también es un álgebra que no se anula y que separa puntos.

Paso 1: mostraremos que si $f \in \mathcal{B}$, entonces $|f| \in \mathcal{B}$.

Sea $M = \sup_{x \in K} |f(x)|$ de modo tal que $f(K) \subseteq [-M, M]$ y consideremos $\varepsilon > 0$. Como la función $|\cdot|$ es continua y acotada en $[-M, M]$, por el teorema de Weierstrass existe $n \in \mathbb{N}$ y constantes a_k tales que

$$\sup_{y \in [-M,M]} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k y^k - |y| \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Evaluando en $y = 0$, notemos que se obtiene que $|a_0| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Luego se sigue que si removemos el término constante del polinomio anterior obtenemos

$$\sup_{y \in [-M,M]} \left| \sum_{k=1}^{n} a_k y^k - |y| \right| \leq \varepsilon.$$

Como $\mathcal{B}$ es álgebra, la función $g = \sum_{k=1}^{n} a_k f^k$ es un élemento de $\mathcal{B}$. Obtenemos que

$$\sup_{x \in K} |g(x) - |f(x)|| = \sup_{x \in K} |\sum_{k=1}^{n} a_k f^k(x) - |f(x)|| \leq \varepsilon.$$

Notemos que Como ε es arbitrario y $\mathcal{B}$ es uniformemente cerrada, obtenemos que $|f| \in \mathcal{B}$.

Paso 2: mostraremos que si $f, g \in \mathcal{B}$ entonces $\text{máx}(f, g)$ y $\text{mín}(f, g)$ están en $\mathcal{B}$. Donde el máximo y mínimo se calculan de manera puntual, es decir, $\text{máx}(f, g)(x) = \text{máx}(f(x), g(x))$ para todo $x \in K$.

Para probar esto, basta verificar que

$$\begin{aligned}\text{máx}(f, g) &= \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2},\\ \text{mín}(f, g) &= \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}.\end{aligned}$$

Por el paso anterior, $|f - g| \in \mathcal{B}$ y por lo tanto $\text{máx}(f, g)$ y $\text{mín}(f, g)$ están en $\mathcal{B}$.

Paso 3: Sea $\varepsilon > 0$. Mostraremos que dada $f \in C(K, \mathbb{R})$ y $x \in K$, existe una función $g_x \in \mathcal{B}$ tal que $g_x(x) = f(x)$ y para todo $t \in K$,

$$g_x(t) > f(t) - \varepsilon.$$

Como $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ separa puntos y no se anula, también $\mathcal{B}$ separa puntos y no se anula. Por la Proposición 4.9.7 para todo $y \in K$ existe $h_y \in \mathcal{B}$ tal que $h_y(x) = f(x)$ y $h_y(y) = f(y)$. Por continuidad, existe una bola abierta B_y centrada en y tal que para todo $t \in B_y$, $|h_y(t) - f(t)| < \varepsilon$. En efecto, como f es continua podemos encontrar $r > 0$ tal que para todo $t \in B(y, r)$ se tenga $|f(t) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Del mismo modo, por continuidad de h_y, podemos encontrar $r' > 0$ tal que para todo $t \in B(y, r')$ se tenga $|h_y(t) - h_y(y)| = |h_y(t) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Utilizando la desigualdad se obtiene que para todo $t \in B_y = B(y, \text{mín}(r, r'))$ se tiene que $|h_y(t) - f(t)| < \varepsilon$.

En particular para todo $t \in B_y$ tenemos que

$$h_y(t) > f(t) - \varepsilon.$$

Por compacidad de K, existen $y_1, \ldots, y_n$ tales que $K = B_{y_1} \cup \cdots \cup B_{y_n}$.

Definamos $g_x = \text{máx}(h_{y_1}, h_{y_2}, \ldots, h_{y_n})$. Iterando el paso 2, obtenemos que $g_x \in \mathcal{B}$. Por un lado, $g_x(x) = x$. Por otro lado, para todo $t \in K$, existe y_i tal que $t \in B_{y_i}$. Tenemos entonces que

$$g_x(t) - f(t) \geq h_{y_i}(t) - f(t) > -\varepsilon.$$

Luego $g_x(t) > f(t) - \varepsilon$ para todo $t \in K$.

Paso 4: Mostraremos ahora que $\mathcal{B} = C(K, \mathbb{R})$. Para ello, dado que $\mathcal{B}$ es uniformemente cerrada, basta demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $h \in \mathcal{B}$ tal que

$$\sup_{t \in K} |f(t) - h(t)| \leq \varepsilon.$$

Por el paso anterior, para cada $x \in K$, existe $g_x \in \mathcal{B}$ tal que para todo $t \in K$, $g_x(t) > f(t) - \varepsilon$. Por continuidad de g_x podemos encontrar una bola B_x centrada en x tal que

$$g_x(t) < f(t) + \varepsilon.$$

Nuevamente, por compacidad de K, podemos encontrar $x_1, \ldots, x_m$ tales que

$$K = B_{x_1} \cup \cdots \cup B_{x_m}.$$

Definamos $h = \text{mín}\{g_{x_1}, \ldots, g_{x_m}\}$. Nuevamente, por el paso 2 tenemos que $h \in \mathcal{B}$. Mostraremos que satisface lo pedido.

Por un lado, como cada g_{x_i} satisface que $g_{x_i}(t) > f(t) - \varepsilon$, obtenemos que

$$h(t) > f(t) - \varepsilon.$$

Por otro lado, para cada $t \in K$ existe un x_j tal que $t \in B_{x_j}$. Luego $h(t) - f(t) < g_{x_i}(t) - f(t) < \varepsilon$. Luego

$$h(t) < f(t) + \varepsilon.$$

Concluimos entonces que

$$|f(t) - h(t)| \leq \varepsilon,$$

lo cual termina la demostración. $\square$

Una aplicación de Stone-Weierstrass, es una versión multidimensional del teorema de Weierstrass. Recordemos que un polinomio en n variables a valores reales es una función P que puede escribirse de la forma

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{N}^n : \sum_{i=1}^n k_i \leq N} a_{k_1,\dots,k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}.$$

para constantes $a_{k_1,\dots,k_n} \in \mathbb{R}$ y un $N \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 4.9.9

Sea $f\colon [0,1]^n \to \mathbb{R}$ una función continua de n variables. Muestre para todo $\varepsilon > 0$ existe un polinomio de n variables $P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ tal que

$$|P(x_1, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)| \leq \varepsilon \text{ para todo } x_1, \dots, x_n \in [0,1]^n.$$

Otra aplicación del teorema de Stone-Weierstrass, es que toda función continua se puede aproximar de manera uniforme por funciones trigonométricas.

Ejercicio 4.9.10

Considere el conjunto

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{z = \mathrm{e}^{2\pi i\theta} \in \mathbb{C} : \theta \in [0,1)\}.$$

Considere la métrica d en S^1 dada por $d(\mathrm{e}^{2\pi i\theta}, \mathrm{e}^{2\pi i\eta}) = \min\{|\theta - \eta|, 1 - |\theta - \eta|\}$. Finalmente, considere $\mathcal{B}$ el conjunto de funciones $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$ de la forma

$$f(e^{2\pi i\theta}) = \sum_{k=0}^{n} c_k \operatorname{Re}(e^{2\pi ik\theta}) + d_k \operatorname{Im}(e^{2\pi ik\theta}),$$

para algún $n \in \mathbb{N}$ donde $\theta \in [0,1)$ y cada $c_k, d_k \in \mathbb{R}$. Re e Im denotan la parte real e imaginaria respectivamente.

1. Pruebe que $\mathcal{A}$ es un álgebra de funciones continuas que no se anula y separa puntos.
2. Concluya que $\mathcal{A}$ es densa en $C(S^1, \mathbb{R})$.
3. Muestre que el espacio $C(S^1, \mathbb{R})$ es homeomorfo al espacio de las funciones continuas periódicas

$$C_{\text{per}}([0,2\pi], \mathbb{R}) = \{f \in C([0,2\pi], \mathbb{R}) : f(0) = f(2\pi)\}.$$

4. Use todo lo anterior para mostrar que la familia $\mathcal{T}$ de las funciones $\tau\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ de la forma

$$\tau(x) = C + \sum_{k=1}^{n} (a_k \sin(nx) + b_k \cos(nx)).$$

para algún $n \in \mathbb{N}$, $C \in \mathbb{R}$ y cada $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, es densa en $C_{\text{per}}([0,2\pi], \mathbb{R})$.

Indicación: en la parte de probar que $\mathcal{A}$ es álgebra, pueden ser útiles las igualdades siguientes, válidas para todo $\theta, x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{i\theta} &= \cos(\theta) + i\sin(\theta),\\
\cos(x)\cos(y) &= \frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2},\\
\sin(x)\sin(y) &= \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2},\\
\sin(x)\cos(y) &= \frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 4.9.11

Sea f una función en $C_{\text{per}}([0,2\pi],\mathbb{R})$ que cumple que

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = 0 \quad y \quad \int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx) = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Muestre que f es la función constante igual a 0.

Lamentablemente, el teorema de Stone-Weierstrass para álgebras reales no es válido en el caso de un álgebra compleja, como lo muestra el siguiente ejercicio.

Ejercicio 4.9.12

Sea $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ el círculo unitario. Considere $\mathcal{A}$ el conjunto de funciones $f\colon S^1 \to \mathbb{C}$ de la forma

$$f(e^{2\pi i\theta}) = \sum_{k=0}^{n} c_k e^{2\pi ik\theta},$$

para algún $n \in \mathbb{N}$ donde $\theta \in [0,1)$ y cada $c_k \in \mathbb{C}$.
Pruebe que $\mathcal{A}$ es un álgebra de funciones continuas que no se anula y separa puntos. Pero que sin embargo no es densa en $C(S^1,\mathbb{C})$.
Indicación: muestre que si $f \in \mathcal{A}$, entonces,

$$\int_0^1 f(e^{2\pi i\theta})e^{2\pi i\theta}\, \mathrm{d}\theta = 0.$$

Concluya que lo mismo es válido para la cerradura uniforme de $\mathcal{A}$ y encuentre una función continua $g\colon S^1 \to \mathbb{C}$ que no satisfaga lo anterior.

Recordemos que si $z = a + bi \in \mathbb{C}$, el conjugado de z es el complejo $\bar{z} = a - bi$. Del mismo modo, el conjugado de una función $f\colon X \to \mathbb{C}$ es la función $\overline{f}$ definida por

$$\overline{f}(x) = \overline{f(x)} \text{ para todo } x \in X.$$

Definición 4.9.13

Un álgebra $\mathcal{A}$ de funciones a valores complejos se dice **auto-adjunta** si para toda función $f \in \mathcal{A}$ tenemos que su conjugado $\overline{f}$ también pertenece a $\mathcal{A}$.

Teorema 4.9.14: Stone-Weierstrass (álgebras con valores en $\mathbb{C}$)

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de funciones continuas de un espacio métrico compacto (K, d_K) en $\mathbb{C}$ tal que

- $\mathcal{A}$ no se anula,
- $\mathcal{A}$ separa puntos,
- $\mathcal{A}$ es auto-adjunta.

Entonces el álgebra $\mathcal{A}$ es densa en $(C(K, \mathbb{C}), d_\infty)$.

Demostración. Sea $\mathcal{A}_\mathbb{R}$ el subconjunto de todas las funciones en $\mathcal{A}$ que toman valores reales. Notemos que si $f \in \mathcal{A}$, podemos escribir $f = u + iv$ con u, v funciones a valores reales. Como $\bar{f} \in \mathcal{A}$, entonces

$$u = \frac{f + \bar{f}}{2}, \quad v = \frac{f - \bar{f}}{2i}.$$

Son elementos del álgebra real $\mathcal{A}_\mathbb{R}$.

Es sencillo verificar que $\mathcal{A}_\mathbb{R}$ es álgebra. Si $x_1, x_2 \in K$ son tales que $x_1 \neq x_2$, como $\mathcal{A}$ no se anula y separa puntos tenemos, por la proposición 1, que existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x_1) = 0$ y $f(x_2) = 1$. Luego si $f = u + iv$ tenemos que $u(x_1) = 1$ y $u(x_2) = 0$, por lo cual $\mathcal{A}_\mathbb{R}$ separa puntos y no se anula.

Por el teorema de Stone-Weierstrass para funciones con valores en $\mathbb{R}$, tenemos que $\mathcal{A}_\mathbb{R}$ es denso en $C(K, \mathbb{R})$. Dada una función continua $g\colon K \to \mathbb{C}$, basta escribir $g = u_g + iv_g$ con u_g, v_g funciones a valores reales. Por el resultado anterior existen secuencias $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}_\mathbb{R}$ que convergen respectivamente a u_g y v_g. Luego $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $f_n = u_n + iv_n$ converge uniformemente a g. $\square$

Ejercicio 4.9.15

Considere el álgebra $\mathcal{A}$ de funciones $f\colon S^1 \to \mathbb{C}$ de la forma

$$f(e^{2\pi i\theta}) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{2\pi i k\theta},$$

para algún $n \in \mathbb{N}$ donde $\theta \in [0, 1)$, $c_k \in \mathbb{C}$. Muestre que $\mathcal{A}$ es densa en $C(S^1, \mathbb{C})$.

Capítulo 5

Espacios vectoriales normados

5.1. Introducción

Recordemos brevemente la definición de espacio vectorial.

Definición 5.1.1: Espacio vectorial

Un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ es un grupo abeliano $(E,+)$ junto con un producto escalar $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$ que satisface:

- $(\lambda+\beta)x = \lambda x + \beta x$, para todo $\lambda, \beta \in \mathbb{K}$ y $x \in E$.
- $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x, y \in E$.
- $\lambda(\beta x) = (\lambda\beta)x$, para todo $\lambda, \beta \in \mathbb{K}$ y $x \in E$.
- $1x = x$, para todo $x \in E$.

Un espacio vectorial E provisto de una norma $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ se denomina un **espacio vectorial normado** y se denotará $(E, \|\cdot\|)$.

Los ejemplos clásicos de espacios vectoriales que se estudian en álgebra lineal son $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$. En este curso estudiaremos espacios más exóticos.

Definición 5.1.2: Espacio de Banach

Un espacio vectorial normado se dice **espacio de Banach** si es completo.

Ejemplo 5.1.3

El espacio $E = C([0,1],\mathbb{R})$ es un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$ con la norma del supremo, $C([0,1],\mathbb{R}) = C_b([0,1],\mathbb{R})$ es completo debido a que $\mathbb{R}$ es completo, ver Ejercicio 4.4.6.

Ejercicio 5.1.4

Considere el espacio $\ell^2(\mathbb{R})$ de todas las sucesiones reales $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que satisfacen

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 < \infty.$$

Muestre que $\ell^2(\mathbb{R})$ equipado con la suma coordenada y a coordenada y el producto escalar habitual es un espacio vectorial. Considere el espacio $\ell^2(\mathbb{R})$ equipado de la norma

$$\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2 = \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2}.$$

Muestre que efectivamente la expresión anterior es una norma, y que $(\ell^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ es un espacio de Banach.

En general, para todo $1 \leq p < +\infty$ el espacio $\ell^p(\mathbb{R})$ de las sucesiones reales $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que satisfacen $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p < \infty$, provisto de la norma

$$\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

es un espacio de Banach. Lo mismo ocurre para $\ell^\infty(\mathbb{R})$, el espacio de sucesiones acotadas con la norma del supremo.

5.2. Caracterización de espacios de Banach mediante series

En lo que sigue, daremos una segunda mirada a las series que definimos en el capítulo anterior. Precisamente, caracterizaremos los espacios de Banach mediante una propiedad de convergencia de series. Recordemos que si E es un espacio vectorial normado, y $(x_n)_{n\geq 1}$ es una secuencia de valores en E, entonces la n-ésima suma parcial está dada por

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Cuando el límite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe, se denota por

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_k,$$

y se denomina la serie generada por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definición 5.2.1: Convergencia absoluta de series

Decimos que la serie generada por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es **absolutamente convergente** si la serie generada por la secuencia $(\|x_n\|_E)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ existe, es decir, si

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_E = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \|x_k\|_E \qquad \text{existe.}$$

Proposición 5.2.2

Existen espacios vectoriales normados donde

1. Hay series que convergen pero que no convergen absolutamente.
2. Hay series que convergen absolutamente pero que no convergen.

Demostración. Para el primer ejemplo, consideremos $\mathbb{R}$ y la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Es un teorema clásico que esa serie converge a $\ln(2)$, pero no es absolutamente convergente, en efecto, notemos que

$$\frac{1}{n} \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln(n+1) - \ln(n).$$

Luego obtenemos que para todo $m \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} \geq \sum_{n=1}^{m} \ln(n+1) - \ln(n) = \ln(m+1) - 1.$$

Como la expresión del lado derecho diverge, la serie no es absolutamente convergente.

Para el segundo ejemplo, consideremos el espacio $\mathbb{R}[x]$ de polinomios reales en $[0,1]$ con la norma

$$\|P\| = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|.$$

Considere la secuencia $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde

$$P_n = \frac{x^k}{k!}.$$

Por un lado, la secuencia $(\|P_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ genera una serie absolutamente convergente a $\exp(1)$. Por otro lado, si la serie generada por $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergiese a un polinomio $P \in \mathbb{R}[x]$, ese polinomio debe cumplir que para todo $x \in [0,1]$ entonces $P(x) = \exp(x)$. Lo anterior no puede ocurrir pues si $d = \deg(P)$ es su grado, entonces para $x \in (0,1)$ la derivada $(d+1)$-ésima de P en x es 0, en tanto que la derivada $(d+1)$-ésima de exp en x es $\exp(x) > 0$ (notemos eso sí que la serie converge en el espacio de funciones continuas a $\exp(x)$). □

El siguiente resultado es una generalización del criterio M de Weierstrass y permite caracterizar los espacios de Banach utilizando la convergencia de series.

Teorema 5.2.3: Caracterización de espacios de Banach por series

Sea E un espacio vectorial normado. Entonces E es completo si y solamente si toda serie absolutamente convergente es convergente.

Demostración. Supongamos que E es completo y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia cuya serie es absolutamente convergente.

Como $\sum_{k=0}^{\infty}\|x_n\|_E < \infty$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que

$$\sum_{n=N}^{\infty} \|x_n\|_E \leq \varepsilon.$$

Luego, para $m, n > N$ con $m > n$ se tiene

$$\left\|\sum_{k=0}^{m} x_k - \sum_{k=0}^{n} x_k\right\|_E \leq \left\|\sum_{k=n-1}^{m} x_k\right\|_E \leq \sum_{k=n-1}^{m-1} \|x_k\|_E \leq \sum_{k=n-1}^{\infty} \|x_k\|_E \leq \varepsilon.$$

Por lo tanto la secuencia de sumas parciales de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Como E es completo, tenemos que la serie generada por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Ahora supongamos que toda serie absolutamente convergente en E es convergente, y sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de Cauchy en E. La idea es considerar la secuencia de las diferencias

$$z_0 = y_0, \quad z_n = y_n - y_{n-1} \text{ para } n \geq 1,$$

de modo tal que

$$\sum_{k=0}^{N} z_k = y_n.$$

Sin embargo, no hay ninguna razón por la cual $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ debería ser absolutamente convergente. Lo que haremos será más bien mostrar que una subsecuencia de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es tal que sus términos de diferencia definidos de modo análogo a los de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si convergen absolutamente.

Para cada $n \geq 1$, como la secuencia $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, podemos encontrar $\alpha(n) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i, j \geq \alpha(n)$,

$$\|y_i - y_j\|_E \leq \frac{1}{2^n}.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\alpha(n+1) > \alpha(n)$, de este modo $(y_{\alpha(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsecuencia de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Definamos ahora la secuencia de las diferencias $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$w_0 = y_{\alpha(0)}, \quad w_n = y_{\alpha(n)} - y_{\alpha(n-1)} \text{ para } n \geq 1.$$

Tenemos que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es absolutamente convergente pues

$$\sum_{k=0}^{N} \|w_k\|_E = \|y_{\alpha(0)}\|_E + \sum_{k=1}^{N} \|y_{\alpha(k)} - y_{\alpha(k-1)}\|_E \leq \|y_{\alpha(0)}\|_E + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2^k} = \|y_{\alpha(0)}\|_E + 2.$$

Por hipótesis, tenemos entonces que $\sum_{k=0}^{N} w_k = y_{\alpha(N)}$ converge, por lo cual $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite una subsecuencia convergente. Como ya es sucesión de Cauchy, obtenemos que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. $\square$

Ejercicio 5.2.4

Deduzca el criterio M de Weierstrass utilizando el teorema anterior.

Ejercicio 5.2.5

Sea E un espacio de Banach y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que genera una serie absolutamente convergente. Muestre que el límite no depende del orden de la serie, es decir, si $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función biyectiva, entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k = \sum_{k=0}^{\infty} x_{\varphi(k)}.$$

5.3. Transformaciones lineales continuas

Comenzaremos la sección recordando algunos conceptos de álgebra lineal. Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Decimos que $x \in E$ es **combinación lineal** de $x_1, \dots, x_n \in E$ si existen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tal que

$$x = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n.$$

Definición 5.3.1: Base

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Decimos que un conjunto B es:

- **Linealmente independiente** si para todo $n \in \mathbb{N}$, $b_1, \dots, b_n \in B$ y $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tenemos que

  $$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = 0 \implies a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0.$$

  De manera equivalente, ningún $b \in B$ es combinación lineal de elementos de $B \setminus \{b\}$.
- **Generador**, si todo $x \in E$ es combinación lineal de elementos de B.
- **Base** si es generador y linealmente independiente.

La **dimensión** de un espacio E es la cardinalidad de una base de B. Si no existe una base finita de E, decimos que E tiene **dimensión infinita**.

Ejercicio 5.3.2

Muestre que si B es una base de E, entonces todo $x \in E$ admite una única escritura como combinación lineal de elementos de B.

Se puede demostrar que todo espacio vectorial admite una base (ver Teorema A.2.3), y que todas las bases tienen la misma cardinalidad (es decir, la dimensión está bien definida). Estas pruebas dependen del axioma de elección (más precisamente, se utiliza una forma equivalente del axioma de elección llamada "lema de Zorn", ver Definición A.2.2.

Definición 5.3.3: Función lineal

Sean E y F dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Una función $T\colon E \to F$ es **lineal** si satisface que para todo $a, b \in \mathbb{K}$ y todo $x, y \in E$,

$$T(ax + by) = aT(x) + bT(y).$$

Usualmente se habla de **transformación lineal** o **aplicación lineal** más que de función lineal, con el mismo significado. También se suele utilizar el término **operador** cuando se trata de una transformación lineal $T\colon E \to E$ de un espacio en sí mismo, aunque en la literatura pueden encontrarse otros usos de esa palabra.

Ejemplo 5.3.4

Para cada matriz $M = (m(i,j))_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ la función $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por

$$[T(x_1, \ldots, x_n)]_i = \sum_{j=1}^{n} m(i,j) x_j, \text{ para } 1 \le i \le m,$$

es una función lineal. De hecho, toda transformación lineal entre estos espacios puede representarse de esta forma.

Ejemplo 5.3.5

Sea $E = C([0,1], \mathbb{R})$. La función $T\colon E \to \mathbb{R}$ dada por

$$T(f) = \int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x,$$

es lineal.

En lo que sigue estudiaremos cuando una función lineal es continua. Esto puede parecer un poco extraño, ya que cuando consideramos funciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ para $n, m \ge 1$, estas siempre son continuas como muestra el siguiente teorema.

Teorema 5.3.6: Continuidad de transformaciones lineales en dimensión finita

Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ dos espacios vectoriales normados. Si E es de dimensión finita, entonces toda transformación lineal $T\colon E \to F$ es continua.

Demostración. Como $n = \dim(E) < +\infty$, todas las normas en E son equivalentes. Sin pérdida de generalidad podemos considerar la norma definida por

$$\|x\|_E = \sum_{k=1}^{n} |a_k|,$$

para $x = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$ donde $\{e_1, \cdots, e_n\}$ es una base fija de E.

Sea $T\colon E \to F$ una transformación lineal. Sean $x = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$ e $y = \sum_{k=1}^{n} b_k e_k$ en E. Tenemos que

$$\|T(x) - T(y)\|_F = \|T(x-y)\|_F = \left\| T\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k)e_k\right)\right\|_F = \left\|\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k)T(e_k)\right\|_F .$$

Luego,

$$\|T(x) - T(y)\|_F \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k| \, \|T(e_k)\|_F \leq \left(\max_{1\leq k\leq n} \|T(e_k)\|_F\right) \|x-y\|_E.$$

Tomando $C = \max_{1\leq j\leq n} \|T(e^j)\|_F$, deducimos que T es continua. □

A continuación mostraremos que lo anterior no es válido en dimensión infinita. Para ello utilizaremos el teorema de existencia de bases Teorema A.2.3.

Proposición 5.3.7: Existencia de funciones lineales discontinuas

Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial de dimensión infinita. Entonces existe una función lineal discontinua $T\colon E \to \mathbb{R}$.

Demostración. Sea B una base de E. Como E es de dimensión infinita, tenemos que B es un conjunto infinito. Sea $\{e_0, e_1, e_2, \dots\}$ un subconjunto numerable de B. Definamos $L\colon B \to \mathbb{R}$ de la manera siguiente

$$L(b) = \begin{cases} n\|e_i\| & \text{si } b = e_i \text{ para algún } i \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Como todo elemento de E se puede escribir de manera única como combinación lineal de elementos de B, la función L se extiende de manera única a una función $T\colon E \to \mathbb{R}$ de la manera siguiente: si $x = a_1 b_1 + \dots a_n b_n$, entonces

$$T(x) = a_1 L(b_1) + \dots + a_n L(b_n).$$

Mostremos que T no es continua. En efecto, considere la secuencia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde

$$a_n = \frac{e_n}{n\|e_n\|}.$$

Tenemos que $\|a_n\| = \frac{1}{n}$ y por lo tanto la secuencia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0. Por otro lado,

$$T(a_n) = T\left(\frac{e_n}{n\|e_n\|}\right) = \frac{1}{n\|e_n\|} T(e_n) = 1.$$

Luego la secuencia $(T(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 1, sin embargo $T(0) = 0$. Esto muestra que T no es continua. □

En el caso de un espacio vectorial normado que no es completo, es posible dar ejemplos más explícitos.

Ejemplo 5.3.8

Sea $\mathbb{R}[x]$, el espacio de los polinomios a coeficientes en $\mathbb{R}$. Este es un espacio vectorial de dimensión infinita. Consideremos en $\mathbb{R}[x]$ la norma

$$\|P\| = \max_{x\in[0,1]} |P(x)|.$$

Definimos la función $T\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ por $T(P) = P(2)$, para todo $P \in \mathbb{R}[x]$. La función T es lineal pero no es continua. En efecto, sea $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios definidos por

$$P_n(x) = \frac{x^n}{2^n}.$$

Tenemos que

$$\|P_n - 0\| = \|P_n\| = \sup_{x\in[0,1]} |P_n(x)| = \frac{1}{2^n},$$

lo que implica que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0. Sin embargo,

$$T(P_n) = P_n(2) = \frac{2^n}{2^n} = 1.$$

Esto muestra que T no es continua, pues $(T(P_n))_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a $T(0) = 0$.

Las construcciones anteriores dicen que en el caso de un espacio vectorial de dimensión infinita, es necesario ser cuidadoso al considerar transformaciones lineales, ya que podrían no ser continuas. A continuación estudiaremos diferentes caracterizaciones de continuidad para transformaciones lineales entre espacios vectoriales normados.

Definición 5.3.9: Transformación lineal acotada

Sean E, F espacios vectoriales normados. Una transformación lineal $T\colon E \to F$ se dice **acotada** si existe $M \geq 0$ tal que

$$\|T(x)\|_F \leq M\|x\|_E \text{ para todo } x \in E.$$

Observación 5.1. Es importante destacar que la noción de transformación lineal acotada no corresponde a la noción de función acotada que manejamos usualmente. Por ejemplo, la transformación $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $T(x) = x$ es una transformación lineal acotada pues $|T(x)| \leq |x|$, pero en tanto que función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ no es acotada.

La noción de acotada para operadores lineales proviene de una topología en el espacio de transformaciones lineales continuas, la cual es generada por la norma fuerte de operadores.

Definición 5.3.10: espacio de transformaciones lineales acotados

Sean E, F espacios de vectoriales normados y consideremos $\mathcal{L}(E, F)$ el espacio de transformaciones lineales acotadas de E en F. La norma fuerte (a veces llamada la norma de operadores, especialmente cuando $E = F$) está dada para $T \in \mathcal{L}(E, F)$ por

$$\|T\|_{\text{op}} = \inf\{c \geq 0 : \|T(x)\|_F \leq c\|x\|_E \text{ para todo } x \in E\}.$$

Ejercicio 5.3.11

Muestre que para una transformación lineal acotada $T\colon E \to F$ donde $E \neq \{0\}$:

$$\begin{aligned}\|T\|_{\text{op}} &= \text{ínf}\{c \geq 0 : \|T(x)\|_F \leq c\|x\|_E \text{ para todo } x \in E\}\\ &= \sup\{\|T(x)\|_F : \|x\|_E \leq 1\}\\ &= \sup\{\|T(x)\|_F : \|x\|_E = 1\}\\ &= \sup_{x \in E\setminus\{0\}} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E}.\end{aligned}$$

Si no hay riesgo de error, escribiremos simplemente $\|T\|$ en vez de $\|T\|_{\text{op}}$ para simplificar la notación.

Proposición 5.3.12: Continuidad para transformaciones lineales

Sean E, F espacios vectoriales normados y $T\colon E \to F$ una transformación lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. T es Lipschitz.
2. T es uniformemente continua.
3. T es continua.
4. T es continua para un $x_0 \in E$
5. T es continua en 0.
6. T es acotada.

Demostración. Claramente (1) $\implies$ (2) $\implies$ (3) $\implies$ (4).

Supongamos (4) y probemos (5). Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia que converge a 0 y consideremos la secuencia $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde $z_n = x_0 + y_n$. Como T es continua en x_0, si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una secuencia que converge a x_0, entonces $T(z_n)$ converge a $T(x_0)$. Obtenemos que

$$T(y_n) = T(z_n) - T(x_0) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Tomando límite, obtenemos que $T(y_n)$ converge a 0. Como $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es arbitraria, obtenemos que T es continua en 0.

Supongamos (5) y probemos (6). Si T es continua en 0, entonces para $\varepsilon = 1$ existe δ tal que si $\|x\|_E \leq \delta$ entonces $\|T(x)\|_F \leq 1$. Deducimos que si $x \neq 0$, entonces

$$\|T(x)\|_F = \frac{\|x\|_E}{\delta}\left\|T\left(\delta\frac{x}{\|x\|_E}\right)\right\|_F \leq \frac{\|x\|_E}{\delta}.$$

De aquí se deduce que si tomamos $M = \frac{1}{\delta}$ entonces $\|T(x)\|_F \leq M\|x\|_E$ para todo $x \in E$.

Supongamos (6) y probemos (1). Como T es acotada, existe $M > 0$ tal que $\|T(z)\|_F \leq M\|z\|_E$ para todo $z \in E$. En particular, dados $x, y \in E$, escribiendo $z = y - x$ obtenemos

$$\|T(y) - T(x)\|_F = \|T(y - x)\|_F \leq M\|y - x\|_E \leq \varepsilon.$$

Luego T es Lipschitz. □

Observación 5.2. De la proposición anterior se deduce que el espacio $\mathcal{L}(E, F)$ de transformaciones lineales acotadas de E en F es realmente el espacio de transformaciones lineales continuas de E en F.

Proposición 5.3.13: Si F es Banach, entonces $\mathcal{L}(E, F)$ es Banach

Sean E, F espacios vectoriales normados. Si F es completo, entonces $\mathcal{L}(E, F)$ es completo para la norma fuerte de operadores.

Demostración. Sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de Cauchy en $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|_{\text{op}})$. Es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geq N$ entonces

$$\|T_n - T_m\|_{\text{op}} \leq \varepsilon.$$

En otras palabras, para cada $x \in E$ y $n, m \geq N$ tenemos que $\|T_n(x) - T_m(x)\|_F \leq \varepsilon \|x\|_E$. Por lo tanto la secuencia $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en F para cada $x \in E$ fijo, y como F es completo, cada secuencia de Cauchy converge a un valor en F. Definamos para $x \in E$ la función $f \colon E \to F$ como

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x).$$

Como T_n es lineal para cada n, se deduce que f también es una función lineal.

Como $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, entonces existe $M \geq 0$ tal que $\|T_n\|_{\text{op}} \leq M$ para todo $k \in \mathbb{N}$. De esto podemos deducir que para todo $x \in E$,

$$\|f(x)\|_F \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{\text{op}} \|x\|_E \leq M\|x\|_E.$$

Es decir, f es acotada. Esto implica que $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Mostremos que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f.

En efecto, para cada $x \in E$ tenemos que

$$\|f(x) - T_n(x)\|_F = \lim_{m\to\infty} \|T_m(x) - T_n(x)\|_F \leq \varepsilon \|x\|_E.$$

En particular, por el ejercicio anterior obtenemos que para todo $n \geq N$,

$$\|f - T_n\|_{\text{op}} = \sup_{\|x\|_E=1} \|(f - T_n)(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x) - T_n(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

Por lo cual $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en la norma fuerte de operadores. Esto muestra que $\mathcal{L}(E, F)$ es completo. □

Ejemplo 5.3.14

Sea E un espacio de Banach y considere el espacio de funciones lineales continuas $\mathcal{L}(E, E)$. Dado $T \in \mathcal{L}(E, E)$, podemos definir su composición por $T^0 = \text{id}$, y $T^n = T \circ T^{n-1}$ para $n \geq 1$. Sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathcal{L}(E, E)$ que lo haga completo. Supongamos que $\|T\| < 1$, entonces la secuencia $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ genera una serie que es absolutamente convergente. Como $\mathcal{L}(E, E)$ es completo, tenemos que la secuencia $(T^k)_{k\in\mathbb{N}}$ genera la serie

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} T^k = \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

Ejemplo 5.3.15

Sea E un espacio de Banach y considere el espacio de funciones lineales continuas $\mathcal{L}(E,E)$. Para $T \in \mathcal{L}(E,E)$, notemos que si $\|\cdot\|$ es una norma en $\mathcal{L}(E,E)$ que lo hace completo, entonces

$$\sum_{k=0}^{N} \left\| \frac{T^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{N} \frac{\|T\|^k}{k!} \leq \exp(\|T\|).$$

Como $\mathcal{L}(E,E)$ es completo, tenemos que la secuencia $\left(\frac{T^k}{k!}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ genera la serie

$$\exp(T) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}.$$

De este modo es posible definir la exponencial de una transformación lineal continua de un espacio en sí mismo.

Ejercicio 5.3.16

Calcule explícitamente la transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \left[\exp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 5.3.17

Muestre que la exponencial de una matriz (no necesariamente invertible) siempre es invertible *indicación: muestre que la inversa de* $\exp(A)$ *es* $\exp(-A)$.

5.4. El teorema de Banach-Steinhaus

Hoy veremos un teorema que generaliza la idea que enunciamos anteriormente de que la convergencia puntual es suficiente para asegurar la continuidad en el límite si la familia es suficientemente "rígida". En este caso la palabra rígida se referirá a funciones lineales continuas. Para eso utilizaremos el teorema de categorías de Baire.

Teorema 5.4.1: Principio de la cota uniforme

Sea E un espacio de Banach, F un espacio vectorial normados y sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}(E,F)$ una familia de funciones lineales continuas. Supongamos que para todo $x \in E$ existe $M_x \geq 0$ tal que $\|T(x)\|_F \leq M_x$ para todo $T \in \mathcal{F}$. Entonces existe $M \geq 0$ tal que

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E = 1} \|T(x)\|_F \leq M \text{ para todo } T \in \mathcal{F}.$$

Demostración. Considere para $n \in \mathbb{N}$ los conjuntos

$$E_n = \{x \in E : \|T(x)\|_F \leq n, \text{ para todo } T \in \mathcal{F}\}.$$

Es claro que la secuencia $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es encajonada y que cada conjunto E_n es cerrado. Por otro lado, por hipótesis para cada x existe M_x tal que $|T(x)| \leq M_x$ para todo $T \in \mathcal{F}$, tenemos que $x \in E_n$ para todo $n \geq M_x$. En particular la unión de los conjuntos E_n es E.

Por el Corolario 2.7.13 (teorema de Baire, segunda forma), existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int}(E_N) \neq \emptyset$. En otras palabras, existe $x_0 \in E$ y $R > 0$ tal que $B^\circ(x_0, R) \subseteq E_N$. Como E_N es cerrado, tenemos que $B(x_0, R) \subseteq E_N$.

Reescribiendo lo anterior, obtenemos que para todo $x \in E$ tal que $\|x - x_0\|_E \leq \epsilon$, tenemos que para todo $T \in \mathcal{F}$ entonces

$$\|T(x)\|_F \leq N.$$

Sea $y \in E$ tal que $\|y\|_E \leq 1$ y sea $T \in \mathcal{F}$ arbitrario. Obtenemos que

$$\begin{aligned}\|T(y)\|_F &= \frac{1}{R}\|T(Ry - x_0) + T(x_0)\|_F \\ &\leq \frac{1}{R}\|T(Ry - x_0)\|_F + \frac{1}{R}\|T(x_0)\|_F \leq \frac{2N}{R}.\end{aligned}$$

Como T es arbitrario, definiendo $M = \frac{2N}{R}$ obtenemos que

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E = 1} \|T(x)\|_F \leq M \text{ para todo } T \in \mathcal{F}.$$

□

Un corolario del principio de la cota uniforme es que el límite puntual de transformaciones lineales continuas es una transformación lineal continua

Corolario 5.4.2: Convergencia puntual de funciones lineales preserva continuidad

Sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de transformaciones lineales continuas entre un espacio de Banach E y un espacio vectorial normado F. Si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a una función $T\colon E \to F$, entonces T es una transformación lineal continua.

Demostración. Es directo de la caracterización de transformaciones lineales continuas como funciones lineales acotadas. Queda como ejercicio completar los detalles. □

Observación 5.3. En la literatura, a veces se le llama teorema de Banach-Steinhaus al principio de la cota uniforme, y a veces a su corolario sobre la convergencia puntual de funciones lineales continuas.

Ejercicio 5.4.3

Construya una secuencia de funciones lineales continuas $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que converjan a una función lineal continua pero que no converjan uniformemente. Concluya que el teorema anterior no permite asegurar la convergencia uniforme.

Ejercicio 5.4.4

Considere $C([0,1], \mathbb{R})$ con la norma del supremo y sea $A \subseteq C([0,1], \mathbb{R})$. Muestre que si para toda forma lineal continua $T\colon C([0,1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\{T(f) : f \in A\} \text{ es un conjunto acotado en } \mathbb{R}.$$

Entonces el conjunto A es acotado en $C([0,1],\mathbb{R})$ con respecto a la norma del supremo.

5.5. Espacio dual y bidual

Definición 5.5.1: Espacio dual

Sea E un espacio vectorial normado. Denotaremos por $E^* = \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ el espacio de funciones lineales continuas de E en $\mathbb{R}$ y lo llamaremos el **dual** de E.
El espacio E^* se dota de la norma fuerte de operadores definida anteriormente

$$\|x^*\|_{\text{op}} = \sup\{|x^*(x)| : \|x\|_E = 1\} \text{ para todo } x^* \in E^*.$$

Los elementos de un espacio dual E^* suelen llamarse **formas lineales continuas** y denotarse con un superíndice asterisco, como por ejemplo $x^* \in E^*$. En general, al escribir E^* damos por entendido que se está utilizando la norma fuerte de operadores.

Ejercicio 5.5.2

Caracterice el espacio dual de $\mathbb{R}^n$ y describa la norma de operadores.

Ejercicio 5.5.3

Muestre que si E es un espacio vectorial normado entonces E^* con su norma es también un espacio vectorial normado con las operaciones

$$(x^* + y^*)(x) = x^*(x) + y^*(x) \text{ para todo } x \in E,$$

$$(cx^*)(x) = cx^*(x) \text{ para todo } c \in \mathbb{R}, x \in E.$$

Observación 5.4. En algunos textos se utiliza la notación E^* para referirse al **dual algebraico** de E, es decir, el espacio vectorial de funciones lineales (no necesariamente continuas) de E en $\mathbb{R}$. En ese contexto el dual que definimos anteriormente se denota usualmente por E' y se llama **dual topológico**. En nuestro caso utilizaremos la notación E^* más bien para referirnos al dual topológico y no hablaremos del dual algebraico.

Una consecuencia de la Proposición 5.3.13 es que el dual de un espacio vectorial normado es un espacio de Banach, inclusive si el espacio de partida no era completo!

Una pregunta interesante es qué tan grande es el dual de un espacio vectorial normado. A priori podría ocurrir que E^* sea el espacio vectorial trivial con un solo punto (la función constante igual a cero)! A continuación hablaremos de un teorema clásico que permite mostrar que si $E \neq \{0\}$, entonces existen inifnitas formas lineales continuas distintas en E^*.

Sea M un subespacio de E. Decimos que una transformación lineal $T\colon E \to \mathbb{R}$ es una **extensión** de $G\colon M \to \mathbb{R}$ si para todo $x \in M$ tenemos que

$$T(x) = G(x).$$

Decimos que una función $p\colon E \to \mathbb{R}$ es una **seminorma** si satisface todas las propiedades de una norma salvo que $p(x) = 0$ si y solamente $x = 0$.

Teorema 5.5.4: Hahn-Banach (extensión)

Sea E un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$. Sea M un subespacio vectorial de E y x^* una forma lineal sobre M. Para toda seminorma $p\colon E \to \mathbb{R}$ tal que

$$|x^*(x)| \leq p(x) \quad \text{para todo } x \in M,$$

existe una forma lineal $\widetilde{x}^* \in E^*$ tal que $\widetilde{x}^*$ es una extensión de x^* y

$$|\widetilde{x}^*(x)| \leq p(x) \quad \text{para todo } x \in E.$$

Observación 5.5. La prueba del teorema de Hahn-Banach utiliza el lema de Zorn. No lo demostraremos en este curso (Una prueba puede encontrase en Teorema 1.1 de [Bre10]). Se ha probado que es posible demostrar el teorema de Hanh-Banach usando postulados un poco más débiles que el lema de Zorn, como por ejemplo el lema de ultrafiltros.

Observación 5.6. La condición de que p sea una seminorma se puede relajar aún más por la condición de que p sea una función convexa. Es decir, tal que $p(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda p(x) + (1-\lambda)p(y)$ para todo $x, y \in E$, $\lambda \in [0,1]$.

Un corolario del teorema de Hanh-Banach es la existencia de una cantidad al menos no-numerable de funciones lineales continuas en todo espacio vectorial no trivial.

Corolario 5.5.5: Existencia de formas lineales continuas no triviales

Sea E un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$. Si $E \neq \{0\}$ entonces existe una cantidad no numerable de formas lineales continuas no triviales.

Demostración. Como $E \neq \{0\}$, existe $x_0 \in E \setminus \{0\}$. Denotamos por $\mathbb{R}x_0$ el subespacio de E generado por x_0. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, definamos $x_\lambda^*\colon \mathbb{R}x_0 \to \mathbb{R}$ por

$$x_\lambda^*(\alpha x_0) = \lambda\alpha \quad \text{para todo } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Considere la seminorma $p_\lambda\colon E \to \mathbb{R}$ dada por

$$p_\lambda(x) = \frac{|\lambda|}{\|x_0\|_E}\|x\|_E.$$

Notemos que $|x_\lambda^*(z)| \leq p_\lambda(z)$ para todo $z \in \mathbb{R}x_0$. Por el teorema de Hahn-Banach, existe una forma lineal $\widetilde{x}_\lambda^*\colon E \to \mathbb{R}$ que extiende a x_λ^* y tal que $|\widetilde{x}_\lambda^*(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

En particular,

$$\|\widetilde{x}_\lambda^*\| = \sup_{\|x\|_E=1} |\widetilde{x}_\lambda^*(x)| \leq \sup_{\|x\|_E=1} p_\lambda(x) = \frac{\lambda}{\|x_0\|_E}.$$

Luego $\widetilde{x}_\lambda^*$ es una forma lineal continua. Notemos que cada valor de λ asigna el valor $\widetilde{x}_\lambda^*(x_0) = \lambda$, luego, la transformación $\varphi\colon \mathbb{R} \to E^*$ tal que $\varphi(\lambda) = \widetilde{x}_\lambda^*$ es inyectiva, de donde se deduce que existen no numerables formas lineales continuas no triviales. □

Observación 5.7. En la prueba anterior, notemos que la extensión $\widetilde{x}_\lambda^*$ de x_λ^* tiene la misma norma que x_λ^*, es decir

$$\sup_{\|x\|_E=1, x\in E} |\widetilde{x}_\lambda^*(x)| = \sup_{\|x\|_E=1, x\in \mathbb{R}x_0} |x_\lambda^*(x)|.$$

En general la misma prueba muestra que se puede extender una función lineal definida en un subespacio F de modo tal que la extensión tenga la misma norma.

Definición 5.5.6: Espacio bidual

Sea E un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$. El espacio **bidual** de E (o bidual topológico) es el espacio $E^{**} = \mathcal{L}(E^*, \mathbb{R})$ provisto de la norma de operadores.

De forma más simple, el bidual de E es el dual de E^*. Lo que es interesante, es que el espacio E se puede identificar con un subespacio de E^{**}.

Proposición 5.5.7: E es un subespacio de E^{**}

Existe una isometría lineal y continua $\varphi\colon E \to E^{**}$.

Demostración. Dado $x \in E$, se puede definir $\phi_x\colon E^* \to \mathbb{R}$ por

$$\phi_x(f) = f(x), \text{ para todo } f \in E^*.$$

Notemos que ϕ_x es lineal pues

$$\phi_x(\lambda_1 f + \lambda_2 g) = (\lambda_1 f + \lambda_2 g)(x) = \lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x) = \lambda_1 \phi_x(f) + \lambda_2 \phi_x(g),$$

y por otro lado es continua ya que,

$$|\phi_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\|_{E^*} \|x\|_E.$$

Luego $\phi_x \in E^{**}$. Definamos $\varphi\colon E \to E^{**}$ la función tal que

$$\varphi(x) = \phi_x, \text{ para todo } x \in E.$$

Es directo verificar que φ es lineal. Por otro lado, es continua ya que

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\|_E = 1} \|\varphi(x)\|_{E^{**}} = \sup_{\|x\|_E=1} \|\phi_x\|_{E^{**}} = \sup_{\|x\|_E=1} \sup_{\|f\|_{E^*}=1} |f(x)| \leq 1.$$

Mostremos que φ es isometría, es decir, que $\|\phi_x\|_{E^{**}} = \|x\|_E$. El resultado es evidente para $x = 0$, supongamos que $x \neq 0$.

Por el argumento anterior, tenemos que $\|\phi_x\|_{E^{**}} \leq \|x\|_E$. Para la otra dirección, consideremos el subespacio vectorial $\mathbb{R}x$ y la función $f\colon \mathbb{R}x \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(\lambda x) = \lambda \|x\|_E.$$

Por el teorema de Hahn-Banach, sabemos que f puede extenderse a una función lineal continua $\widetilde{f}\colon E \to \mathbb{R}$ tal que $\|f\| = \|\widetilde{f}\|$. De este modo

$$\|\phi_x\|_{E^{**}} = \sup_{f \in E^* \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{E^*}} \geq \frac{|\widetilde{f}(x)|}{\|\widetilde{f}\|_{E^*}} = \|x\|_E.$$

Luego φ es una isometría. □

Observación 5.8. La función $\varphi\colon E \to E^{**}$ dada por

$$\varphi(x) = \phi_x \text{ para todo } x \in E$$

donde $\phi_x\colon E^* \to \mathbb{R}$ está dada por $\phi_x(f) = f(x)$ para todo $f \in E^*$, se denomina **evaluación canónica**.

Los espacios E y $\varphi(E) \subseteq E^{**}$ son isomorfos en tanto que espacios vectoriales, pero más aún, son isométricos en tanto que espacios vectoriales normados. En palabras simples, esto significa que son esencialmente el mismo espacio. Cuando existe una isometría lineal continua biyectiva entre dos espacios vectoriales normados, se dice que son **isométricamente isomorfos**.

Ejemplo 5.5.8: Espacio tal que el bidual es distinto a sí mismo

Sea E un espacio vectorial normado no completo, por ejemplo el espacio de polinomios a coeficientes reales con la norma del supremo en $[0,1]$. Luego E^{**} es completo, por lo cual

$$(E, \|\cdot\|_E) \text{ no es isométricamente isomorfo a } (E^{**}, \|\cdot\|_{E^{**}}).$$

Ya que la completitud de un espacio métrico es invariante de isomorfismo de espacios métricos (isometría biyectiva).

Definición 5.5.9: Espacio reflexivo

Un espacio de Banach para el cual la evaluación canónica $\varphi \colon E \to E^{**}$ es sobreyectiva se dice **reflexivo**.

Observación 5.9. Es importante notar que existen espacios de Banach que son isométricamente isomorfos a su bidual, pero la evaluación canónica no es sobreyectiva. Es decir, espacios que pueden identificarse a su bidual pero no mediante la función φ definida anteriormente. Un ejemplo de esto puede encontrarse en [Jam51].

Los siguientes ejemplos y observaciones serán dados sin demostración. Para demostrarlos es necesario pasar por varias desigualdades intermedias, más precisamente, la desigualdad de Jensen, luego la desigualdad de Young, la desigualdad de Hölder y finalmente la desigualdad de Minkowski. Una referencia standard para sus pruebas es [Bre10].

Ejemplo 5.5.10: Espacios $\ell^p(\mathbb{R})$

Sea $p \in (1, +\infty)$. Consideremos el espacio $\ell^p(\mathbb{R})$ dado por

$$\ell^p(\mathbb{R}) = \{a \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \sum_{n\in\mathbb{N}} |a(n)|^p < \infty.\}$$

Con la norma

$$\|a\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Entonces el espacio $(\ell^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ es reflexivo.

Observación 5.10. Se puede verificar de hecho, que si $p, q \in (1, +\infty)$ son tales que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Entonces el dual de $(\ell^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ es isométricamente isomorfo a $(\ell^q(\mathbb{R}), \|\cdot\|_q)$ mediante la transformación que asigna a cada elemento de $b \in \ell^q(\mathbb{R})$ la transformación lineal $J_b \colon \ell^p(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $J_b(a) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a(n)b(n)$. Con este resultado, el resultado del ejemplo anterior se convierte en un corolario. Notemos que el caso de $p = 2$ es especialmente interesante, ya que el dual de $(\ell^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ es isométricamente isomorfo sí mismo.

Los casos límites de $\ell^1(\mathbb{R})$ y del espacio $\ell^\infty(\mathbb{R})$ de las sucesiones acotadas son de especial interés, ya que no son espacios reflexivos. Estos espacios junto con sus espacios duales se estudian usualmente en un curso de teoría de la medida o de análisis funcional.

5.6. Espacios de Hilbert

Hay un tipo especial de espacio vectorial normado cuyo dual es isométricamente isomorfo a si mismo. Para ello debemos definir algunos términos

Definición 5.6.1: forma bilineal simétrica definida positiva

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una **forma bilineal** sobre E es una función $f\colon E \times E \to \mathbb{R}$ que satisface lo siguiente:

1. $f(x, y+z) = f(x,y) + f(x,z)$ y $f(x+y, z) = f(x,z) + f(y,z)$, para todo $x, y, z \in E$.
2. $f(x, \lambda y) = f(\lambda x, y) = \lambda f(x,y)$, para todo $x, y \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si además la forma bilineal satisface que

$$f(x,y) = f(y,x),$$

decimos que es **simétrica**.
Si además la forma bilineal simétrica satisface que

$$f(x,x) > 0 \text{ si } x \neq 0,$$

decimos que es **definida positiva**.

Dadas las propiedades anteriores, una forma bilineal simétrica se llama también **producto escalar** y se suele denotar de la manera siguiente:

$$f(x,y) = \langle x, y \rangle.$$

De este punto en adelante, privilegiaremos la notación $\langle x, y \rangle$ y el término **producto escalar**.

Definición 5.6.2: espacio pre-Hilbert

Un espacio **pre-Hilbert** es un espacio vectorial E sobre $\mathbb{R}$ equipado con un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle\colon E \times E \to \mathbb{R}$.

Proposición 5.6.3: Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Sea E un espacio pre-Hilbert con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Para todo $x, y \in E$ se tiene que

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

Demostración. Notemos primero que $\langle 0, 0 \rangle = \langle 1, 0 \rangle - \langle 1, 0 \rangle = 0$. Luego la desigualdad es trivial si $x = 0$ o $y = 0$. Supongamos que ambos son distintos de 0.

Definamos por conveniencia para $z \in E$, $\|z\| = \sqrt{\langle z, z \rangle}$ (más adelante mostraremos que es efectivamente una norma en E, por ahora es solo una notación).

Consideremos $\lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} \in \mathbb{R}$. Tenemos que Por propiedades del producto escalar tenemos que $\|x - \lambda y\|^2 \geq 0$. Podemos reescribir esta expresión de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \|x - \lambda y\|^2 &= \|x\|^2 - 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 - 2\frac{(\langle x, y \rangle)^2}{\|y\|^2} + \frac{(\langle x, y \rangle)^2}{\|y\|^4}\|y\|^2 \end{aligned}$$

$$= \|x\|^2 - \frac{(\langle x, y\rangle)^2}{\|y\|^2}$$

Luego $\|x\|^2 \geq \frac{(\langle x,y\rangle)^2}{\|y\|^2}$, lo cual es equivalente a decir que

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|^2\|y\|^2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}.$$

Lo cual demuestra la desigualdad de Cauchy-Schwarz □

Corolario 5.6.4: Norma generada por producto interno

Dado un espacio pre-Hilbert E con producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, la expresión $\|z\| = \sqrt{\langle z, z\rangle}$ para $z \in E$ define una norma en E.

Demostración. Si $\|z\| = 0$, tenemos que $\langle z, z\rangle = 0$. Como la forma lineal es definida positiva, tenemos que $z = 0$.

Por otro lado, para $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\|\lambda z\| = \sqrt{\langle \lambda z, \lambda z\rangle} = \sqrt{\lambda^2\langle z, z\rangle} = |\lambda|\|z\|.$$

Finalmente, verifiquemos la desigualdad triangular. Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos que que

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2\\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2\\ &= (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

Luego $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. □

Con lo anterior, finalmente podemos definir los espacios de Hilbert.

Definición 5.6.5: Espacio de Hilbert

Decimos que un espacio vectorial H provisto de un producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un **espacio de Hilbert** si es completo con respecto a la norma que proviene del producto escalar.

Ejemplo 5.6.6: $\mathbb{R}^n$ con el producto punto

Sea $n \geq 1$. El espacio $\mathbb{R}^n$ equipado con la norma asociada al producto escalar

$$\langle(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

es un espacio de Hilbert. La norma en este caso es

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}.$$

Ejemplo 5.6.7: Espacio de secuencias cuadrado-sumables

El espacio $\ell^2(\mathbb{R})$ de las sucesiones $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tales que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a(n)|^2 < \infty$, equipado del producto escalar

$$\langle a, b\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} a(n)b(n),$$

es un espacio de Hilbert. La norma en este caso es

$$\|a\|_2 = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a(n)|^2\right)^{1/2}.$$

Ejemplo 5.6.8: Espacio de funciones continuas cuadrado-integrables

El espacio $\mathcal{L}^2([0,1],\mathbb{R})$ de las funciones continuas $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tales que

$$\int_0^1 |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x < \infty,$$

equipado del producto escalar

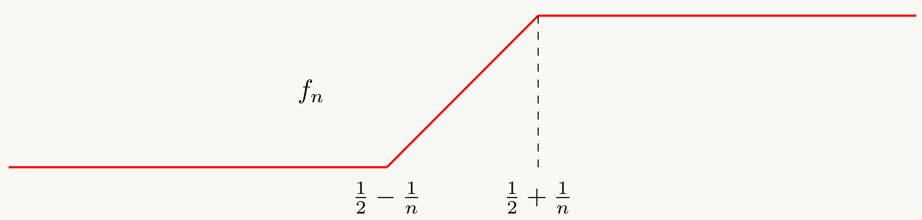
$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

Es un espacio pre-Hilbert que induce la norma siguiente.

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

El espacio $\mathcal{L}^2([0,1],\mathbb{R})$ no es un espacio de Hilbert ya que no es completo, por ejemplo, la sucesión de funciones $(f_n)_{n\geq 1}$ dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \\ \frac{nx}{2} - \frac{n}{4} + \frac{1}{2} & \text{si } x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}] \\ 1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \end{cases},$$



Es de Cauchy pero no converge en $\mathcal{L}^2([0,1],\mathbb{R})$.

Observación 5.11. La convergencia en $\mathcal{L}^2([0,1],\mathbb{R})$ no implica la convergencia puntual. En efecto, la secuencia de funciones continuas $(f_n)_{n\geq 1}$ dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1 - \frac{1}{n^2}) \\ \sqrt{2n^3x + 2n(1-n^2)} & \text{si } x \in [1 - \frac{1}{n^2}, 1] \end{cases}$$

Cumple que

$$\|f_n\|_2 = \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}.$$

Luego la secuencia $(f_n)_{n\geq 1}$ converge en norma $\|\cdot\|_2$ a la función constante igual a 0. Sin embargo, $(f_n(1))_{n\geq 1}$ diverge.

Observación 5.12. El espacio $\mathcal{L}^2([0,1],\mathbb{R})$ se puede definir en un contexto más general donde sus elementos no son realmente funciones continuas, sino clases de equivalencia de funciones cuyos valores difieren de alguna función continua en un conjunto pequeño, esto es, un conjunto "de medida nula". Este espacio, que se denota por $L^2([0,1],\mathbb{R})$, es un espacio de Hilbert con propiedades más interesantes que $\mathcal{L}^2([0,1],\mathbb{R})$ y se estudia usualmente en un curso de teoría de la medida.

Es posible definir todo lo anterior en el caso de espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$. En ese caso, en vez de considerar una forma bilinear simétrica para definir el producto escalar, se utiliza una **forma sesquilinear**, es decir, una función $f\colon E \times E \to \mathbb{C}$ que satisface lo siguiente:

1. $f(x, y+z) = f(x,y) + f(x,z)$ y $f(x+y, z) = f(x,z) + f(y,z)$, para todo $x, y, z \in E$.
2. $f(\lambda x, y) = \lambda f(x,y)$ y $f(x, \lambda y) = \overline{\lambda} f(x,y)$, para todo $x, y \in E$ y $\lambda \in \mathbb{C}$.

Se dice que la forma sesquilineal es **hermítica** si

$$f(x,y) = \overline{f(y,x)} \text{ para todo } x, y \in E.$$

Un espacio pre-Hilbert complejo, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, equipado con una forma sesquilinear hermítica definida positiva. Estos espacios también satisfacen la desigualdad de Cauchy-Schwarz y se puede definir una norma mediante $\|z\| = \sqrt{f(z,z)}$. Del mismo modo, se dice que un espacio pre-Hilbert complejo es un espacio de Hilbert, si la norma definida por su forma sesquilinear hermítica definida positiva lo hace completo.

Veamos algunas propiedades de los espacios de Hilbert (reales). Para ellos precisaremos de algunas definiciones.

Definición 5.6.9: Proyección

Sea (X,d) un espacio métrico, $A \subseteq X$ y $x \in X$. Una **proyección** de x sobre A es un elemento $p \in A$ que satisface

$$d(x, A) = d(x, p).$$

En general, las proyecciones no tienen por que existir. Sabemos que si A es compacto, entonces para todo $x \in X$ existe al menos una proyección. Cuando la proyección existe, esta no necesariamente es única. Por ejemplo, el centro de una circunferencia tiene una infinidad de proyecciones sobre la circunferencia.

Definición 5.6.10: Convexidad

Sea H un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Un subconjunto C de H es **convexo**, si para todo $x, y \in C$ y $\lambda \in [0,1]$ se tiene que $\lambda x + (1-\lambda) y \in C$.

Teorema 5.6.11: Teorema de la proyección

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $C \subseteq H$ un subconjunto convexo, cerrado y no vacío. Entonces, para cada punto $x \in H$ existe una única proyección $\pi_C(x)$ de x sobre C.

Para la prueba, ver Teorema 4.10 de [Rud87].

Definición 5.6.12: Ortogonalidad

Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert. Se dice que x e y en H son **ortogonales** si $\langle x, y\rangle = 0$. Para $A \subseteq H$ se define el **conjunto ortogonal** de A como

$$A^{\perp} = \{x \in H : \langle x, y\rangle = 0, \text{ para todo } y \in A\}.$$

Con lo anterior, se puede demostrar el teorema siguiente (ver nuevamente [Rud87].)

Proposición 5.6.13: Caracterización de espacios ortogonales

Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert y F un subespacio vectorial cerrado de H. La proyección de $x \in H$ sobre F está caracterizada de la manera siguiente:

$$\langle x - \pi_F(x), z\rangle = 0, \text{ si y solamente si } z \in F.$$

Usando los resultados de proyección se puede demostrar que un espacio de Hilbert real es isomorfo a su dual. Este resultado es consecuencia del teorema de representación de Riesz. Para su demostración ver Teorema 4.12 de [Rud87].

Teorema 5.6.14: Teorema de representación de Riesz

Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert. Para cada forma lineal $T \in H^*$ existe un único $y \in H$ tal que:

$$T(x) = \langle x, y\rangle, \text{ para todo } x \in H.$$

Es claro que la aplicación $T_y : H \to \mathbb{R}$ dada por $T_y(x) = \langle x, y\rangle$ es lineal. El teorema anterior dice que de hecho, esas son todas las funciones lineales continuas de H en $\mathbb{R}$. Se puede demostrar entonces que la transformación $\varphi : H \to H^*$ dada por $\varphi(y) = T_y$ es un isomorfismo, y por lo tanto todo espacio de Hilbert es autodual.

Apéndice A

Axioma de elección y lema de Zorn

A.1. Una pincelada de teoría de conjuntos

A inicios del siglo XX, gran parte de la matemática se realizaba usando de manera intuitiva la noción de "conjunto" en donde se podía definir de manera irrestricta un conjunto de elementos determinados por una propiedad. Esto presentaba problemas, uno de los más notables es la llamada **paradoja de Russell**:

Ejemplo A.1.1: Paradoja de Russell

Sea E el conjunto de los conjuntos que no se contienen a si mismos, es decir

$$E = \{M : M \notin M\}.$$

Si se pudiese definir este conjunto, entonces la expresión "E pertenece a E" no es ni cierta ni falsa. Si $E \in E$, entonces por definición $E \notin E$ lo cual es una contradicción; Por otro lado, si $E \notin E$ entonces por definición $E \in E$, lo cual también lleva a una contradicción.

En el lenguaje de lógica, una axiomatización que lleve a enunciados que sean a la vez falsos y verdaderos se denomina **inconsistente**. Hay que mencionar que anterior a la paradoja de Russell (1901), sí hubo intentos de axiomatizar la teoría de conjuntos, notablemente los de Cantor y Frege, que se demostraron inconsistentes posteriormente.

Hoy se utilizan varias axiomáticas distintas de teoría de conjuntos. Las más notables son las de Zermelo-Fraenkel + axioma de elección (ZFC), Von Neumann-Bernays-Gödel (NBG) y Morse-Kelley (MK), y son equivalentes en lo que respecta a predicados que involucran solamente conjuntos. Es interesante notar que no se ha logrado mostrar que ninguna de estas axiomáticas es consistente.

La axiomática de Zermelo-Fraenkel consiste en nueve postulados. A continuación mostraremos algunos y explicaremos el sentido del resto sin dar las fórmulas o entrar en detalles. Una introducción a esta teoría puede encontrarse en [Gol96].

1. **Axioma de extensionalidad**: dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos.
$$\forall a, (a \in x \iff a \in y) \iff x = y.$$
2. **Axioma del conjunto vacío**: existe el conjunto vacío $\varnothing$.
$$\exists \varnothing : \forall y, y \notin \varnothing.$$
3. **Axioma de pares**: Dados dos conjuntos x e y, existe el un conjunto $z = \{x, y\}$ que los contiene a ambos.
$$\forall x, \forall y \exists z (\forall u \in z, u = x \vee u = y).$$
4. **Axioma de la unión**: dada una colección de conjuntos, existe un conjunto que contiene los elementos de todos ellos.

5. **Axioma del conjunto potencia**: Para cada conjunto x, existe un conjunto que contiene todos los subconjuntos de x.
6. **Esquema axiomático de especificación**: Para cualquier fórmula de primer orden con una variable libre $\phi(v)$ y todo conjunto x, existe un conjunto que contiene los elementos a de x que satisfacen $\phi(a)$.
7. **Esquema axiomático de reemplazo**: Un objeto definido a partir de un conjunto y una función "definible" es también un conjunto.
8. **Axioma de infinitud**: Existe un conjunto infinito en el sentido siguiente, existe un conjunto x tal que $\varnothing \in x$, y si $y \in x$ entonces $y \cup \{y\} \in x$. (esto codifica la noción de sucesor y permite la existencia de $\mathbb{N}$)
9. **Axioma de regularidad**: Para todo conjunto no vacío x existe un conjunto $y \in x$ tal que $x \cap y = \varnothing$. Esto en particular evita que hayan conjuntos que se contengan a si mismos.

En general, los axiomas anteriores no bastan para demostrar teoremas a los cuales estamos habituados, como por ejemplo que el producto de espacios topológicos compactos es compacto (teorema de Tychonoff), o que todo espacio vectorial admite una base. Es por eso que usualmente se añade un axioma extra a la teoría ZF llamado **axioma de elección**. La axiomática anterior sumada a este axioma se denomina axiomática ZFC.

Definición A.1.2: Axioma de elección

Dada una colección de conjuntos no vacíos $\{X_i\}_{i\in I}$ existe una función "de elección" $f\colon I \to \bigcup_{i\in I} X_i$ tal que $f(i) \in X_i$ para todo $i \in I$. Formalmente,

$$\forall X \left[\varnothing \notin X \implies \exists f\colon X \to \bigcup X \quad \forall A \in X\,(f(A) \in A)\right].$$

Ejercicio A.1.3: Formulación equivalente del axioma de elección

Muestre que el axioma de elección es equivalente al enunciado: Dada una colección de conjuntos no vacíos $\{X_i\}_{i\in I}$, entonces su producto cartesiano es no vacío.

Si bien el axioma anterior parece natural, su inclusión en la teoría tiene consecuencias poco naturales, como por ejemplo la paradoja de Banach-Tarski (existe una partición finita de la bola unitaria en $\mathbb{R}^3$ tal que si trasladamos y rotamos cada elemento de la partición de manera adecuada, el resultado son dos copias de la bola unitaria en $\mathbb{R}^3$.)

Se ha demostrado que, condicional a que la teoría de ZF sea consistente, entonces tanto ZF + axioma de elección es consistente como ZF+ la negación del axioma de elección es consistente. En otras palabras, el axioma de elección no se puede demostrar ni cierto ni falso en ZF.

A.2. Lema de Zorn y principio del buen orden

A continuación mostraremos dos enunciados que son lógicamente equivalentes al axioma de elección en ZF. Para ello recordemos que un orden total en un conjunto X se denomina **buen orden** si todo subconjunto no vacío de X admite un elemento mínimo.

Por ejemplo, el orden habitual en los números naturales es un buen orden. El siguiente enunciado (que llamaremos provisoriamente "principio del buen orden") dice que es posible dotar a cualquier conjunto de un buen orden.

Definición A.2.1: Principio del buen orden

Todo conjunto puede ser dotado de un buen orden.

Dado un conjunto X y un orden parcial $\prec$ en X, una **cadena** es un subconjunto $Y \subseteq X$ tal que la restricción del orden $\prec$ a Y genera un orden total. Una cadena $Y \subseteq X$ admite **cota superior**, si existe $z \in X$ tal que $y \prec z$ para todo $y \in Y$. Decimos que un elemento x en el orden $\prec$ es **maximal**, si para todo $y \in X$ tal que $x \prec y$, entonces $x = y$. Consideremos el siguiente enunciado (que llamaremos provisionalmente "lema de Zorn").

Definición A.2.2: Lema de Zorn

Sea X un conjunto no vacío dotado de un orden parcial $\prec$. Si toda cadena no vacía de X admite una cota superior, entonces existe un elemento maximal en X.

Antes de continuar, mostraremos que la existencia de bases en un espacio vectorial es una consecuencia del lema de Zorn (si asumimos el lema de Zorn como verdadero)

Teorema A.2.3: Existencia de bases en un espacio vectorial

Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces existe una base B de E.

Demostración. Por definición, un espacio vectorial es no vacío (el conjunto vacío no contiene un elemento identidad para la suma). Consideremos el conjunto $LI(E)$ de todos los subconjuntos de E que son linealmente independientes ordenado parcialmente por la inclusión $\subseteq$. Dada una cadena no vacía $C \subseteq LI(E)$, mostremos que su unión $U = \bigcup_{A \in C} A$ es una cota superior en $LI(E)$.

En efecto, dado $A \in C$, como $A \subseteq U$ es claro que U es cota superior de la cadena C. Si U no fuese linealmente independiente, existiria $u_1, \ldots, u_n$ y $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ no todos nulos tales que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_1 = 0.$$

Por definición, cada a_i pertenece a un conjunto $A_i \in C$, se deduce luego que para $\bar{A} = \text{máx}\{A_1, \ldots, A_n\} \in C$, cada $a_i \in \bar{A}$ y luego existiría un elemento en C que no es linealmente independiente contradiciendo que C es cadena en $LI(E)$. Deducimos que U es linealmente independiente.

Por el lema de Zorn, existe un elemento maximal $B \in LI(E)$, es decir, un conjunto linealmente indpendiente que no es subconjunto estricto de ningún otro conjunto linealmente independiente. Mostremos que B es también generador.

Si B no fuese generador, existiría $x \in E \setminus B$ que no puede ser escrito como combinación lineal de elementos en B. Se deduce que $B \cup \{x\}$ es un conjunto linealmente independiente que contiene a B, lo cual contradice la maximalidad de B. □

Suele decirse en broma que el axioma de elección es "evidente", el principio del buen orden es "claramente falso" y el lema de Zorn... "pues quizás sí quizás no". Lo sorprendente es que estos últimos enunciados no son realmente resultados de ZF, sino que son formulaciones equivalentes del axioma de elección!

Teorema A.2.4: Equivalencias del axioma de elección en ZF

Asumiendo la axiomática ZF, son equivalentes:

1. El axioma de elección,
2. El principio del buen orden,
3. El lema de Zorn.

Una verdadera demostración del resultado anterior implicaría definir formalmente el resto de postulados de ZF y utilizar lógica proposicional de primer orden para mostrar las equivalencias anteriores, lo cual está más allá de los objetivos de este curso. Daremos sin embargo una idea intuitiva de estas pruebas.

Demostración. (2) $\implies$ (1): Sea X una colección de conjuntos no vacíos y consideremos la unión de todos ellos $U = \bigcup_{A \in X} A$. Por el teorema del buen orden existe un buen orden $\leq$ en U. Sea $f\colon X \to U$ la función definida por

$$f(A) = \min(A).$$

Donde $\min(A)$ se refiere al mínimo del conjunto A determinado por el buen orden $\leq$. Tenemos que f es una función de elección.

(3) $\implies$ (2): Sea X un conjunto y consideremos el conjunto $BO(X)$ de todas las tuplas $(Y, \leq)$ donde $Y \subseteq X$ y $\leq$ es un buen orden en Y. Claramente la tupla dada por $\varnothing$ y el orden vacío es un elemento de $BO(X)$, por lo cual $BO(X) \neq \varnothing$.

Dados conjuntos Y_1, Y_2 dotados de órdenes $\leq_1, \leq_2$ respectivamente, decimos que $(Y_1, \leq_1)$ es un **segmento inicial** de $(Y_2, \leq_2)$ si $Y_1 \subseteq Y_2$, $\leq_1 \subseteq \leq_2$ y para todo $a \in Y_1$ tenemos que el conjunto $\{b \in Y_2 : b \leq_2 a\} \subseteq Y_1$.

Dotamos $BO(X)$ del orden parcial donde $(Y_1, \leq_1) \prec (Y_2, \leq_2)$ si y solamente si $(Y_1, \leq_1)$ es segmento inicial de $(Y_2, \leq_2)$. Sea $C = (Y_i, \leq_i)_{i \in I}$ una cadena en $BO(X)$. Tomemos $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$ y $\leq = \bigcup_{i \in I} \leq_i$. Es fácil verificar que todo orden $(Y_i, \leq_i)$ es segmento inicial de $(Y, \leq)$. Mostremos que $\leq$ es un buen orden sobre Y.

En efecto, sea $S \subseteq Y$ un conjunto no vacío. Luego existe $a \in S$. Por definición existe $i \in I$ tal que $a \in Y_i$. Como $(Y_i, \leq_i)$ es segmento inicial de $(Y, \leq)$, el conjunto $F = \{b \in S : b \leq a\}$ está contenido en Y_i. Cómo la restricción de $\leq$ a $S_a \times S_a$ es $\leq_i$, y $\leq_i$ es buen orden, existe el mínimo de S_a que coincide con el mínimo de S. Esto muestra que $\leq$ es buen orden.

Por el lema de Zorn, existe un elemento maximal $(E, \leq)$ en $BO(X)$. Basta demostrar que $E = X$. Si $E \neq X$, entonces existe $x \in X \setminus E$ y podemos definir un orden en $E \cup \{x\}$ donde x sea mayor a todo elemento de E. El orden $(E, \leq)$ sería un segmento inicial de este orden, lo cual contradice la maximalidad de $(E, \leq)$.

(1) $\implies$ (3): La demostración del lema de Zorn a partir del axioma de elección es un poco más compleja y para dar una idea de ella haremos uso (no justificado y muy informal) de la teoría de ordinales.

Un ordinal es un conjunto O con la propiedad de que todo subconjunto propio de O es también un elemento de O y la relación de subconjunto define un buen orden. Por ejemplo

1. $\varnothing$ con el orden total trivial es un ordinal.
2. $\{\varnothing\}$ con el orden $\varnothing \leq \{\varnothing\}$ es un ordinal.
3. $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ con el orden $\varnothing \leq \{\varnothing\} \leq \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ es un ordinal.

Hay dos maneras de generar ordinales a partir de ordinales.

1. Dado un ordinal O, se puede considerar el ordinal $S = O \cup \{O\}$. Este ordinal se denomina **sucesor**.
2. Dado un conjunto de ordinales C, se puede considerar el ordina $L = \bigcup_{O \in C} O$. Si L no pertenece a C, el ordinal L se denomina **límite**.

En general, se puede comenzar con $\varnothing$ y construir una secuencia de ordinales sucesores que representan los naturales, luego tomar el límite de ellos para obtener el primer ordinal infinito, luego tomar sucesivamente sucerores de este y luego límite, etc. Lo que se puede probar es que la colección de ordinales es muy GRANDE, en el sentido de que no existe ningún conjunto que contenga a todos los ordinales. La razón (informal) es que si existiese un conjunto que contuviese a todos los ordinales, entonces este se podría identificar como un ordinal también, lo cual está proscrito por el axioma de regularidad (ver paradoja de Burali-Forti). Una consecuencia de que la colección de los ordinales no sea un conjunto es que no se puede definir una función inyectiva de la colección de ordinales a un conjunto.

Daremos una idea de como deducir el lema de Zorn a partir del axioma de elección utilizando ordinales. Supongamos por contradicción que existe un conjunto X no vacío parcialmente ordenado por $\prec$ donde toda cadena no vacía admite una cota superior, pero que sin embargo no admite un elemento maximal, es decir, para todo $x \in X$ el conjunto $U_x = \{y \in X : x \prec y, y \neq x\}$ es no vacío. Por el axioma de elección existe $f \colon X \to X$ tal que $f(x) \in U_x$ para todo $x \in X$.

Sea $\mathcal{C}$ la colección de cadenas no vacías de X. para cada cadena $C \in \mathcal{C}$, el conjunto U_C de cotas estrictamente superiores para C es no vacío. Por el axioma de elección, existe una función $h \colon \mathcal{C} \to \bigcup_{C \in \mathcal{C}} U_C$ que a cada cadena le asigna una cota superior en X.

Sea $x \in X$ arbitrario. Definamos una función g por inducción transfinita en los ordinales de la manera siguiente:

1. para el ordinal $\varnothing$, $g(\varnothing) = x$.
2. para un ordinal sucesor, $g(\{O\} \cup O) = f(g(O))$.
3. para un ordinal límite, $g(\bigcup_{O \in A} O) = h((g(O))_{O \in A})$.

Como los ordinales son totalmente ordenados, tenemos que esta es una función estrictamente creciente con respecto al orden $\prec$, por lo cual es inyectiva. Esto contradice la paradoja de Burali-Forti. $\square$

Bibliografía

[Bre10] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer New York, 2010.

[Dug66] James Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[Eng89] R. Engelking. *General Topology*. Sigma series in pure mathematics. Heldermann, 1989.

[Gol96] Derek Goldrei. *Classic set theory : a guided independent study*. Chapman & Hall, London New York, 1996.

[Jam51] R. C. James. A non-reflexive banach space isometric with its second conjugate space. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 37(3):174–177, March 1951.

[Kel75] John Kelley. *General topology*. Springer-Verlag New York, New York, 1975.

[Mun00] James Munkres. *Topology*. Prentice Hall, Inc, Upper Saddle River, NJ, 2000.

[Rud76] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis*. McGraw-Hill, New York, 1976.

[Rud87] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill, New York, 1987.

[Tao16] Terence Tao. *Analysis II*. Springer Singapore, 2016.