Entropía en sistemas dinámicos

Sebastián **Barbieri Lemp**
Universidad de Santiago de Chile

Jornada de postgrado USACH

Agosto, 2023

Entropía de Shannon

Consideremos bolitas $x_1, \ldots, x_n$ y una medida de probabilidad $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\cdots$	x_n
μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7		μ_n

Entropía de Shannon

Consideremos bolitas $x_1, \ldots, x_n$ y una medida de probabilidad $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$.

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & \cdots & x_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 & \mu_6 & \mu_7 & & \mu_n \end{array}$$

Entropía de Shannon 48

$$H(\mu) = -\sum_{i=1}^{n} \mu_i \log(\mu_i).$$

Entropía de Shannon

Entropía de Shannon

$$H(\mu) = -\sum_{i=1}^{n} \mu_i \log(\mu_i).$$

Es una medida de la "**incerteza**" asociada a la medida.

Entropía de Shannon

Entropía de Shannon

$$H(\mu) = -\sum_{i=1}^{n} \mu_i \log(\mu_i).$$

Es una medida de la "**incerteza**" asociada a la medida.

1. Si μ es determinista, $H(\mu) = 0$.

Entropía de Shannon

Entropía de Shannon

$$H(\mu) = -\sum_{i=1}^{n} \mu_i \log(\mu_i).$$

Es una medida de la "**incerteza**" asociada a la medida.

1. Si μ es determinista, $H(\mu) = 0$.
2. H es una función cóncava en el simplex de medidas de probabilidad sobre $\{1, \ldots, n\}$.

Entropía de Shannon

Entropía de Shannon

$$H(\mu) = -\sum_{i=1}^{n} \mu_i \log(\mu_i).$$

Es una medida de la "**incerteza**" asociada a la medida.

1. Si μ es determinista, $H(\mu) = 0$.
2. H es una función cóncava en el simplex de medidas de probabilidad sobre $\{1, \ldots, n\}$.
3. $H(\mu)$ alcanza el máximo para una distribución uniforme

$$\text{Si } \mu = \left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right) \text{ entonces } H(\mu) = \log(n).$$

Sistemas dinámicos medibles

$$(X, T, \mu)$$

$$(X, T, \mu)$$

1. X es un espacio métrico compacto.
2. $T\colon X \to X$ es una transformación medible (con respecto a la σ-álgebra Boreliana)
3. μ es una medida Boreliana de probabilidad invariante

$$\mu(A) = \mu(T^{-1}(A)) \text{ para todo } A \text{ Boreliano.}$$

Ejemplo: rotación

Sea $\alpha \in [0, 1]$ fijo. Un ejemplo de sistema dinámico medible es una rotación por α en el círculo.

$$(S^1, R_\alpha, \lambda).$$

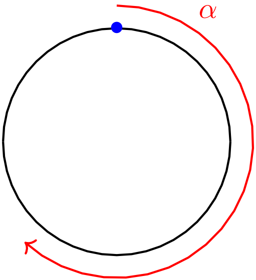
1. $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ es el círculo.
2. $R_\alpha(z) = z \exp(2\pi i \alpha)$.
3. λ es la medida de Haar.

Ejemplo: rotación

Sea $\alpha \in [0,1]$ fijo. Un ejemplo de sistema dinámico medible es una rotación por α en el círculo.

$$(S^1, R_\alpha, \lambda).$$

1. $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ es el círculo.
2. $R_\alpha(z) = z \exp(2\pi i \alpha)$.
3. λ es la medida de Haar.



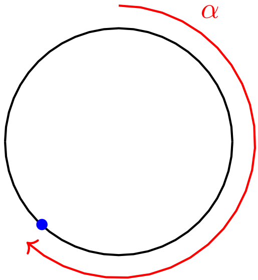
$$\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Ejemplo: rotación

Sea $\alpha \in [0,1]$ fijo. Un ejemplo de sistema dinámico medible es una rotación por α en el círculo.

$$(S^1, R_\alpha, \lambda).$$

1. $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ es el círculo.
2. $R_\alpha(z) = z\exp(2\pi i\alpha)$.
3. λ es la medida de Haar.



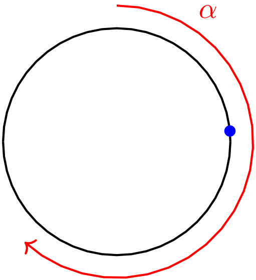
$$\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Ejemplo: rotación

Sea $\alpha \in [0,1]$ fijo. Un ejemplo de sistema dinámico medible es una rotación por α en el círculo.

$$(S^1, R_\alpha, \lambda).$$

1. $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ es el círculo.
2. $R_\alpha(z) = z \exp(2\pi i \alpha)$.
3. λ es la medida de Haar.



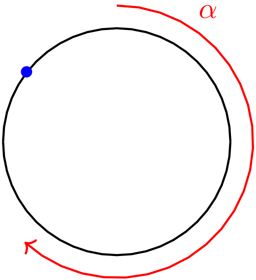
$$\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Ejemplo: rotación

Sea $\alpha \in [0,1]$ fijo. Un ejemplo de sistema dinámico medible es una rotación por α en el círculo.

$$(S^1, R_\alpha, \lambda).$$

1. $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ es el círculo.
2. $R_\alpha(z) = z\exp(2\pi i\alpha)$.
3. λ es la medida de Haar.



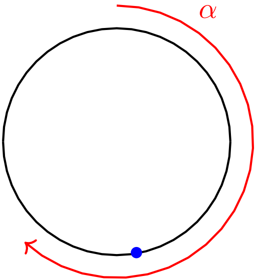
$$\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Ejemplo: rotación

Sea $\alpha \in [0,1]$ fijo. Un ejemplo de sistema dinámico medible es una rotación por α en el círculo.

$$(S^1, R_\alpha, \lambda).$$

1. $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ es el círculo.
2. $R_\alpha(z) = z \exp(2\pi i \alpha)$.
3. λ es la medida de Haar.



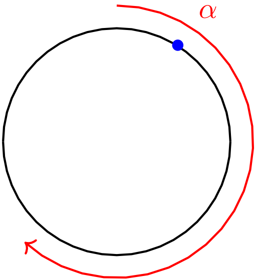
$$\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Ejemplo: rotación

Sea $\alpha \in [0,1]$ fijo. Un ejemplo de sistema dinámico medible es una rotación por α en el círculo.

$$(S^1, R_\alpha, \lambda).$$

1. $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ es el círculo.
2. $R_\alpha(z) = z \exp(2\pi i \alpha)$.
3. λ es la medida de Haar.



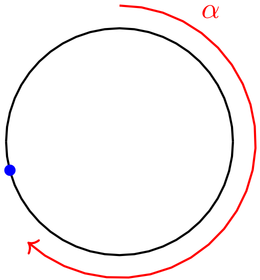
$$\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Ejemplo: rotación

Sea $\alpha \in [0,1]$ fijo. Un ejemplo de sistema dinámico medible es una rotación por α en el círculo.

$$(S^1, R_\alpha, \lambda).$$

1. $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ es el círculo.
2. $R_\alpha(z) = z\exp(2\pi i\alpha)$.
3. λ es la medida de Haar.



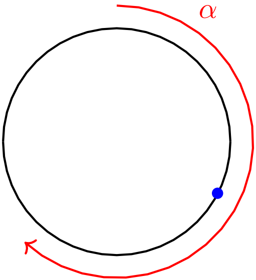
$$\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Ejemplo: rotación

Sea $\alpha \in [0,1]$ fijo. Un ejemplo de sistema dinámico medible es una rotación por α en el círculo.

$$(S^1, R_\alpha, \lambda).$$

1. $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ es el círculo.
2. $R_\alpha(z) = z \exp(2\pi i \alpha)$.
3. λ es la medida de Haar.



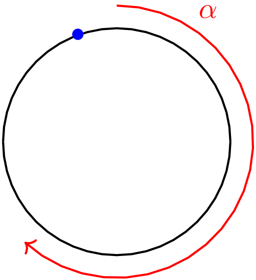
$$\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Ejemplo: rotación

Sea $\alpha \in [0,1]$ fijo. Un ejemplo de sistema dinámico medible es una rotación por α en el círculo.

$$(S^1, R_\alpha, \lambda).$$

1. $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ es el círculo.
2. $R_\alpha(z) = z\exp(2\pi i\alpha)$.
3. λ es la medida de Haar.



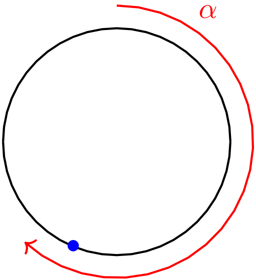
$$\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Ejemplo: rotación

Sea $\alpha \in [0,1]$ fijo. Un ejemplo de sistema dinámico medible es una rotación por α en el círculo.

$$(S^1, R_\alpha, \lambda).$$

1. $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ es el círculo.
2. $R_\alpha(z) = z \exp(2\pi i \alpha)$.
3. λ es la medida de Haar.



$$\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Ejemplo: shift de Bernoulli

Sea A un conjunto finito. Un shift de Bernoulli es un sistema de la forma

$$(A^{\mathbb{N}}, \sigma, \mu).$$

1. $A^{\mathbb{N}} = \{x \colon \mathbb{N} \to A\}$ es el espacio de secuencias infinitas a valores en A.

$$x = \boxed{0}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{2}\cdots$$

Ejemplo: shift de Bernoulli

Sea A un conjunto finito. Un shift de Bernoulli es un sistema de la forma

$$(A^{\mathbb{N}}, \sigma, \mu).$$

1. $A^{\mathbb{N}} = \{x \colon \mathbb{N} \to A\}$ es el espacio de secuencias infinitas a valores en A.

$$x = \boxed{0}\,\boxed{2}\,\boxed{2}\,\boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{2}\,\boxed{2}\,\boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{2}\,\cdots$$

2. $\sigma(x)(n) = x(n+1)$ para $n \in \mathbb{Z}$.

$$\sigma(x) = \boxed{2}\,\boxed{2}\,\boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{2}\,\boxed{2}\,\boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{2}\,\boxed{2}\,\cdots$$

Ejemplo: shift de Bernoulli

Sea A un conjunto finito. Un shift de Bernoulli es un sistema de la forma

$$(A^{\mathbb{N}}, \sigma, \mu).$$

1. $A^{\mathbb{N}} = \{x \colon \mathbb{N} \to A\}$ es el espacio de secuencias infinitas a valores en A.

$$x = \boxed{0}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{2}\cdots$$

2. $\sigma(x)(n) = x(n+1)$ para $n \in \mathbb{Z}$.

$$\sigma(x) = \boxed{2}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{2}\boxed{2}\cdots$$

3. $\mu = \nu^{\mathbb{N}}$ Es la medida de Bernoulli asociada a una medida ν en A.

Ejemplo: shift de Bernoulli

Sea A un conjunto finito. Un shift de Bernoulli es un sistema de la forma

$$(A^{\mathbb{N}}, \sigma, \mu).$$

1. $A^{\mathbb{N}} = \{x \colon \mathbb{N} \to A\}$ es el espacio de secuencias infinitas a valores en A.

$$x = \boxed{0}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{2}\cdots$$

2. $\sigma(x)(n) = x(n+1)$ para $n \in \mathbb{Z}$.

$$\sigma(x) = \boxed{2}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{2}\boxed{2}\cdots$$

3. $\mu = \nu^{\mathbb{N}}$ Es la medida de Bernoulli asociada a una medida ν en A.
   Ej: si ν es uniforme en $A = \{0,1,2\}$ entonces

$$\mu(\{x \in A^{\mathbb{N}} : x(0) = 1 \text{ and } x(1) = 2\}) = \nu(1)\nu(2) = \frac{1}{9}.$$

Ejemplo: shift de Bernoulli

Sea A un conjunto finito. Un shift de Bernoulli es un sistema de la forma

$$(A^{\mathbb{N}}, \sigma, \mu).$$

1. $A^{\mathbb{N}} = \{x \colon \mathbb{N} \to A\}$ es el espacio de secuencias infinitas a valores en A.

$$x = \boxed{0}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{2}\cdots$$

2. $\sigma(x)(n) = x(n+1)$ para $n \in \mathbb{Z}$.

$$\sigma(x) = \boxed{2}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{2}\boxed{2}\cdots$$

3. $\mu = \nu^{\mathbb{N}}$ Es la medida de Bernoulli asociada a una medida ν en A.
   Ej: si ν es uniforme en $A = \{0,1,2\}$ entonces

$$\mu(\{x \in A^{\mathbb{N}} : x(0) = 1 \text{ and } x(1) = 2\}) = \nu(1)\nu(2) = \frac{1}{9}.$$

Noción de isomorfismo

Dados dos SDM (X, T, μ) e (Y, S, ν), la noción natural de **isomorfismo** entre ellos es una transformación Φ tal que

1. $\Phi\colon X' \to Y'$ es bi-medible y biyectiva, donde $X' \subset X$ e $Y' \subset Y$ son subconjuntos con $\mu(X') = \nu(Y') = 1$.
2. $\Phi \circ T = \Phi \circ S$ para todo $x \in X'$.

Noción de isomorfismo

Dados dos SDM (X, T, μ) e (Y, S, ν), la noción natural de **isomorfismo** entre ellos es una transformación Φ tal que

1. $\Phi\colon X' \to Y'$ es bi-medible y biyectiva, donde $X' \subset X$ e $Y' \subset Y$ son subconjuntos con $\mu(X') = \nu(Y') = 1$.
2. $\Phi \circ T = \Phi \circ S$ para todo $x \in X'$.

Pregunta de Von Neumann

Sean μ y ν las medidas de Bernoulli uniformes en los alfabetos de 2 y 3 símbolos respectivamente.

$$(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sigma, \mu^{\mathbb{N}}) \cong (\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}, \sigma, \nu^{\mathbb{N}})?$$

Entropía medible (Kolmogorov 58'- Sinai 59')

- ▷ Introducida por Kolmogorov y Sinai.
- ▷ Usa la entropía de Shannon para generar una invariante de SDM.

▷ Introducida por Kolmogorov y Sinai.

▷ Usa la entropía de Shannon para generar una invariante de SDM.

Sea (X, T, μ) un SDM y sea $\mathcal{P} = \{A_1, \ldots A_n\}$ una partición medible de X.

1. $H_\mu(\mathcal{P}) = -\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \log(\mu(A_i))$.

Entropía medible (Kolmogorov 58'- Sinai 59')

▷ Introducida por Kolmogorov y Sinai.

▷ Usa la entropía de Shannon para generar una invariante de SDM.

Sea (X, T, μ) un SDM y sea $\mathcal{P} = \{A_1, \ldots A_n\}$ una partición medible de X.

1. $H_\mu(\mathcal{P}) = -\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \log(\mu(A_i))$.
2. Dadas $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ particiones, $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ es la partición dada por intersecciones a pares de elementos de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$.
3. La entropía de $\mathcal{P}$ está dada por

$$h_\mu(\mathcal{P}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{P})\right).$$

Entropía medible (Kolmogorov 58'- Sinai 59')

▷ Introducida por Kolmogorov y Sinai.

▷ Usa la entropía de Shannon para generar una invariante de SDM.

Sea (X, T, μ) un SDM y sea $\mathcal{P} = \{A_1, \ldots A_n\}$ una partición medible de X.

1. $H_\mu(\mathcal{P}) = -\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \log(\mu(A_i))$.
2. Dadas $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ particiones, $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ es la partición dada por intersecciones a pares de elementos de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$.
3. La entropía de $\mathcal{P}$ está dada por

$$h_\mu(\mathcal{P}) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} H_\mu \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{P}) \right).$$

La entropía de un SDM (X, T, μ) está dada por

$$h_\mu(T) = \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(\mathcal{P}) \in [0, +\infty].$$

Entropía medible (Kolmogorov 58'- Sinai 59')

- La entropía es una invariante de SDM.

Entropía medible (Kolmogorov 58'- Sinai 59')

▷ La entropía es una invariante de SDM.

▷ La entropía se puede calcular explícitamente usando una partición que genere la σ-álgebra.

Entropía medible (Kolmogorov 58'- Sinai 59')

▷ La entropía es una invariante de SDM.

▷ La entropía se puede calcular explícitamente usando una partición que genere la σ-álgebra.

Example

Consideremos un shift de Bernoulli $(A^{\mathbb{N}}, \sigma, \mu^{\mathbb{N}})$ y la partición

$$\mathcal{P} = \{\{x \in A^{\mathbb{N}} : x(0) = a\} : a \in A\}.$$

`a ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ?` $\cdots$

Entropía medible (Kolmogorov 58'- Sinai 59')

▷ La entropía es una invariante de SDM.

▷ La entropía se puede calcular explícitamente usando una partición que genere la σ-álgebra.

Example

Consideremos un shift de Bernoulli $(A^{\mathbb{N}}, \sigma, \mu^{\mathbb{N}})$ y la partición

$$\mathcal{P} = \{\{x \in A^{\mathbb{N}} : x(0) = a\} : a \in A\}.$$

a	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	···

1. El refinamiento n-ésimo de la partición da

$$\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{P}) = \{\{x \in A^{\mathbb{N}} : x|_{\{0,\dots,n-1\}} = w\} : w \in A^{\{0,\dots,n-1\}}\}.$$

a	b	c	d	e	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	···

De acá un cálculito muestra que

$$H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-n}(\mathcal{P})\right) = -n\sum_{a\in A}\mu(a)\log(\mu(a)) = nH(\mu).$$

Entropía medible (Kolmogorov 58- Sinai 59)

De acá un cálculito muestra que

$$H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-n}(\mathcal{P})\right) = -n\sum_{a\in A}\mu(a)\log(\mu(a)) = nH(\mu).$$

Luego

$$h_\mu(\sigma) = h_\mu(\mathcal{P}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-n}(\mathcal{P})\right) = H(\mu).$$

Entropía medible (Kolmogorov 58- Sinai 59)

De acá un cálculito muestra que

$$H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-n}(\mathcal{P})\right) = -n\sum_{a\in A}\mu(a)\log(\mu(a)) = nH(\mu).$$

Luego

$$h_\mu(\sigma) = h_\mu(\mathcal{P}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-n}(\mathcal{P})\right) = H(\mu).$$

Luego, si μ y ν son las medidas uniformes en el 2-shift y 3-shift respectivamente, sus entropías son $\log(2)$ y $\log(3)$, por lo cual no pueden ser sistemas isomorfos.

Entropía medible (Kolmogorov 58- Sinai 59)

De acá un calculito muestra que

$$H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-n}(\mathcal{P})\right) = -n\sum_{a\in A}\mu(a)\log(\mu(a)) = nH(\mu).$$

Luego

$$h_\mu(\sigma) = h_\mu(\mathcal{P}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-n}(\mathcal{P})\right) = H(\mu).$$

Luego, si μ y ν son las medidas uniformes en el 2-shift y 3-shift respectivamente, sus entropías son $\log(2)$ y $\log(3)$, por lo cual no pueden ser sistemas isomorfos.

Teorema de clasificación de Ornstein 70

Sean $(A^{\mathbb{N}}, \sigma, \mu^{\mathbb{N}})$ y $(B^{\mathbb{N}}, \sigma, \nu^{\mathbb{N}})$ dos shifts de Bernoulli. Los sistemas son isomorfos si y solo si sus entropías coinciden.

$$(X, T)$$

Sistemas dinámicos topológicos

$$(X, T)$$

1. X es un espacio métrico compacto.
2. $T: X \to X$ es una transformación continua.

$$(X, T)$$

1. X es un espacio métrico compacto.
2. $T : X \to X$ es una transformación continua.

Adler, Konheim y McAndrew 65

Existe una noción natural de entropía topológica que satisface

$$h_{\text{top}}(T) = \sup_{\mu \text{ invariante}} h_\mu(T).$$

$$(X, T)$$

1. X es un espacio métrico compacto.
2. $T : X \to X$ es una transformación continua.

Adler, Konheim y McAndrew 65

Existe una noción natural de entropía topológica que satisface

$$h_{\text{top}}(T) = \sup_{\mu \text{ invariante}} h_\mu(T).$$

Para un recubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X, denotemos $N(\mathcal{U})$ la mínima cardinalidad de un subrecubrimiento finito.

$$h_{\text{top}}(T) = \sup_{\mathcal{U}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left(N \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}(\mathcal{U}) \right) \right).$$

Caso interesante: subshift

Sea $X \subset A^{\mathbb{Z}}$ un conjunto cerrado (en la topología producto) e invariante bajo la acción $\mathbb{Z} \curvearrowright A^{\mathbb{Z}}$ dada por

$$\sigma^n(x)(m) = x(m+n).$$

Caso interesante: subshift

Sea $X \subset A^{\mathbb{Z}}$ un conjunto cerrado (en la topología producto) e invariante bajo la acción $\mathbb{Z} \curvearrowright A^{\mathbb{Z}}$ dada por

$$\sigma^n(x)(m) = x(m+n).$$

Definition

Al par (X, σ) se lo denomina un **subshift**.

Caso interesante: subshift

Sea $X \subset A^{\mathbb{Z}}$ un conjunto cerrado (en la topología producto) e invariante bajo la acción $\mathbb{Z} \curvearrowright A^{\mathbb{Z}}$ dada por

$$\sigma^n(x)(m) = x(m+n).$$

Definition

Al par (X, σ) se lo denomina un **subshift**.

Para $n \in \mathbb{N}$, el lenguaje de largo n de X es el conjunto

$$L_n(X) = \{a_0 \dots a_{n-1} \in A^n : \text{ existe } x \in X : x|_{\{0,\dots,n-1\}} = a_0 \dots a_{n-1}\}.$$

Caso interesante: subshift

Sea $X \subset A^{\mathbb{Z}}$ un conjunto cerrado (en la topología producto) e invariante bajo la acción $\mathbb{Z} \curvearrowright A^{\mathbb{Z}}$ dada por

$$\sigma^n(x)(m) = x(m+n).$$

Definition

Al par (X, σ) se lo denomina un **subshift**.

Para $n \in \mathbb{N}$, el lenguaje de largo n de X es el conjunto

$$L_n(X) = \{a_0 \dots a_{n-1} \in A^n : \text{ existe } x \in X : x|_{\{0,\dots,n-1\}} = a_0 \dots a_{n-1}\}.$$

entropía topológica de un subshift

La entropía topológica de un subshift está dada por

$$h_{\text{top}}(X) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(|L_n(X)|).$$

Aplicación: autómatas celulares

Consideremos $A = \{0,1\}$ y la transformación $\tau\colon A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ donde $\tau(x)(n) = x(n) + x(n-1) \bmod 2$.

$$x \;=\; \boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\cdots$$

Aplicación: autómatas celulares

Consideremos $A = \{0, 1\}$ y la transformación $\tau \colon A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ donde $\tau(x)(n) = x(n) + x(n-1)$ mod 2.

$$x \;=\; \boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\cdots$$

$$\sigma\;(x) = \boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\cdots$$

Aplicación: autómatas celulares

Consideremos $A = \{0, 1\}$ y la transformación $\tau \colon A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ donde $\tau(x)(n) = x(n) + x(n-1)$ mod 2.

$$x = \boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\cdots$$

$$\sigma\ (x) = \boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\cdots$$

$$\sigma^2(x) = \boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\cdots$$

Aplicación: autómatas celulares

Consideremos $A = \{0,1\}$ y la transformación $\tau \colon A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ donde $\tau(x)(n) = x(n) + x(n-1) \bmod 2$.

$$
\begin{array}{rcl}
x & = & \boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\cdots \\
\sigma\;(x) & = & \boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\cdots \\
\sigma^2(x) & = & \boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\cdots \\
\sigma^3(x) & = & \boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\cdots
\end{array}
$$

Aplicación: autómatas celulares

Consideremos $A = \{0, 1\}$ y la transformación $\tau \colon A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ donde $\tau(x)(n) = x(n) + x(n-1)$ mod 2.

$$
\begin{array}{rcl}
x & = & \boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\cdots \\
\sigma\,(x) & = & \boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\cdots \\
\sigma^2(x) & = & \boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\cdots \\
\sigma^3(x) & = & \boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\cdots \\
\sigma^4(x) & = & \boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\cdots
\end{array}
$$

Aplicación: autómatas celulares

Consideremos $A = \{0, 1\}$ y la transformación $\tau \colon A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ donde $\tau(x)(n) = x(n) + x(n-1)$ mod 2.

$x =$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\cdots$
$\sigma\ (x) =$	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\cdots$
$\sigma^2(x) =$	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	$\cdots$
$\sigma^3(x) =$	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	$\cdots$
$\sigma^4(x) =$	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	$\cdots$
$\sigma^5(x) =$	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	$\cdots$

Aplicación: autómatas celulares

Consideremos $A = \{0, 1\}$ y la transformación $\tau \colon A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ donde $\tau(x)(n) = x(n) + x(n-1)$ mod 2.

$x =$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\cdots$
$\sigma\ (x) =$	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\cdots$
$\sigma^2(x) =$	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	$\cdots$
$\sigma^3(x) =$	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	$\cdots$
$\sigma^4(x) =$	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	$\cdots$
$\sigma^5(x) =$	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	$\cdots$
$\sigma^6(x) =$	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	$\cdots$

Aplicación: autómatas celulares

Consideremos $A = \{0,1\}$ y la transformación $\tau\colon A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ donde $\tau(x)(n) = x(n) + x(n-1)$ mod 2.

$x =$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\cdots$
$\sigma\ (x) =$	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\cdots$
$\sigma^2(x) =$	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	$\cdots$
$\sigma^3(x) =$	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	$\cdots$
$\sigma^4(x) =$	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	$\cdots$
$\sigma^5(x) =$	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	$\cdots$
$\sigma^6(x) =$	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	$\cdots$

Autómata celular

Un autómata celular es una transformación $\tau\colon A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ para la cual existe $F \subset \mathbb{Z}$ finito y $\Phi\colon A^F \to A$ tal que

$$\tau(x)(n) = \Phi(\sigma^n(x)|_F) \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Teorema de Curtis-Hedlund-Lyndon 69

Los autómatas celulares son precisamente las transformaciones $\tau\colon A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ que son continuas y que conmutan con el shift σ.

Teorema de Curtis-Hedlund-Lyndon 69

Los autómatas celulares son precisamente las transformaciones $\tau\colon A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ que son continuas y que conmutan con el shift σ.

Teorema

Si $\tau\colon A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ es un autómata celular inyectivo, entonces τ es sobreyectivo.

Demostración:

1. Sea φ inyectivo y consideremos $X = \varphi(A^{\mathbb{Z}})$.
2. Luego $\varphi\colon A^{\mathbb{Z}} \to X$ es un homeomorfismo que conmuta con σ. Es decir $(A^{\mathbb{Z}}, \sigma) \cong (X, \sigma)$.
3. Por un lado, $h_{\text{top}}(A^{\mathbb{Z}}) = \log(|A|)$.
4. Si $X \neq A^{\mathbb{Z}}$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $L_n(X) \neq L_n(A^{\mathbb{Z}})$, por lo tanto $h_{\text{top}}(A^{\mathbb{Z}}) < \log(|A|)$.
5. De lo anterior se obtiene que $X = A^{\mathbb{Z}}$.

Autómatas celulares en grupos

Idea interesante: cambiar $\mathbb{Z}$ por un grupo G arbitrario.

Consideremos la acción por homeomorfismos $G \curvearrowright A^G$ dada por

$$gx(h) = x(g^{-1}h) \text{ para todo } x \in A^G, g, h \in G.$$

Autómatas celulares en grupos

Idea interesante: cambiar $\mathbb{Z}$ por un grupo G arbitrario.

Consideremos la acción por homeomorfismos $G \curvearrowright A^G$ dada por

$$gx(h) = x(g^{-1}h) \text{ para todo } x \in A^G, g, h \in G.$$

Autómata celular

Un autómata celular es una transformación $\tau \colon A^G \to A^G$ para la cual existe $F \subset G$ finito y $\Phi \colon A^F \to A$ tal que

$$\tau(x)(g) = \Phi(g^{-1}x|_F) \text{ para todo } g \in G.$$

Autómatas celulares en grupos

Idea interesante: cambiar $\mathbb{Z}$ por un grupo G arbitrario.

Consideremos la acción por homeomorfismos $G \curvearrowright A^G$ dada por

$$gx(h) = x(g^{-1}h) \text{ para todo } x \in A^G, g, h \in G.$$

Autómata celular

Un autómata celular es una transformación $\tau \colon A^G \to A^G$ para la cual existe $F \subset G$ finito y $\Phi \colon A^F \to A$ tal que

$$\tau(x)(g) = \Phi(g^{-1}x|_F) \text{ para todo } g \in G.$$

Conjetura de Gottschalk 73

Todo autómata celular $\tau \colon A^G \to A^G$ inyectivo es sobreyectivo.

Autómatas celulares en grupos

Conjetura de Gottschalk 73

Todo autómata celular $\tau \colon A^G \to A^G$ inyectivo es sobreyectivo.

Conjetura de Gottschalk 73

Todo autómata celular $\tau\colon A^G \to A^G$ inyectivo es sobreyectivo.

Sabemos que la conjetura es cierta precisamente en los grupos en los cuales se puede definir una "buena" noción de entropía topológica. La prueba es "la misma".

Autómatas celulares en grupos

Conjetura de Gottschalk 73

Todo autómata celular $\tau \colon A^G \to A^G$ inyectivo es sobreyectivo.

Sabemos que la conjetura es cierta precisamente en los grupos en los cuales se puede definir una "buena" noción de entropía topológica. La prueba es "la misma".

1. La conjetura de Gottschalk es cierta para grupos **promediables**.

Conjetura de Gottschalk 73

Todo autómata celular $\tau \colon A^G \to A^G$ inyectivo es sobreyectivo.

Sabemos que la conjetura es cierta precisamente en los grupos en los cuales se puede definir una "buena" noción de entropía topológica. La prueba es "la misma".

1. La conjetura de Gottschalk es cierta para grupos **promediables**.
2. (Gromov 99 - Weiss 00, Bowen 10) La conjetura de Gottschalk es cierta para grupos **sóficos**.

Gracias por su atención ☺