Sturmianos multidimensionales y configuraciones indistinguibles

Sebastián **Barbieri Lemp**
En colaboración con S. Labbé and Š. Starosta

Universidad de Santiago de Chile

SOMACHI

Diciembre, 2022

- Sea A un conjunto finito y $d \geq 1$ un entero.
- Una configuración es una función $x \colon \mathbb{Z}^d \to A$.

- Sea A un conjunto finito y $d \geq 1$ un entero.
- Una configuración es una función $x \colon \mathbb{Z}^d \to A$.

Por ejemplo, si $d = 2$ y $A = \{0, 1, 2\}$, una configuración se ve así:

1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2	1
0	2	1	1	0	2	1	0	2	1	0	2	2	1	0
2	1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2
1	0	2	1	1	0	2	1	0	2	1	0	2	2	1
0	2	1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0
2	1	0	2	1	1	0	2	1	0	2	1	0	2	2
1	0	2	1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1
0	2	1	0	2	1	1	0	2	1	0	2	1	0	2
2	1	0	2	1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1
1	0	2	1	0	2	1	0	2	2	1	0	2	1	0
2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2	1	0	2
1	1	0	2	1	0	2	1	0	2	2	1	0	2	1
0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2	1	0
2	1	1	0	2	1	0	2	1	0	2	2	1	0	2
1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2	1

Dos configuraciones $x, y \in A^{\mathbb{Z}^d}$ son **asintóticas** si existe $F \subset \mathbb{Z}^d$ finito tal que $x|_{\mathbb{Z}^d \setminus F} = y|_{\mathbb{Z}^d \setminus F}$.

Dos configuraciones $x, y \in A^{\mathbb{Z}^d}$ son **asintóticas** si existe $F \subset \mathbb{Z}^d$ finito tal que $x|_{\mathbb{Z}^d \setminus F} = y|_{\mathbb{Z}^d \setminus F}$.

$F = \{n \in \mathbb{Z}^d : x_n \neq y_n\}$ es su **conjunto de diferencias**.

x

1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2	1
0	2	1	1	0	2	1	0	2	1	0	2	2	1	0
2	1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2
1	0	2	1	1	0	2	1	0	2	1	0	2	2	1
0	2	1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0
2	1	0	2	1	1	0	2	1	0	2	1	0	2	2
1	0	2	1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1
0	2	1	0	2	1	1	0	2	1	0	2	1	0	2
2	1	0	2	1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1
1	0	2	1	0	2	1	0	2	2	1	0	2	1	0
2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2	1	0	2
1	1	0	2	1	0	2	1	0	2	2	1	0	2	1
0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2	1	0
2	1	1	0	2	1	0	2	1	0	2	2	1	0	2
1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2	1

y

1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2	1
0	2	1	1	0	2	1	0	2	1	0	2	2	1	0
2	1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2
1	0	2	1	1	0	2	1	0	2	1	0	2	2	1
0	2	1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0
2	1	0	2	1	1	0	2	1	0	2	1	0	2	2
1	0	2	1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1
0	2	1	0	2	1	0	2	2	1	0	2	1	0	2
2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2	1	0	2	1
1	0	2	1	0	2	1	0	2	2	1	0	2	1	0
2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2	1	0	2
1	1	0	2	1	0	2	1	0	2	2	1	0	2	1
0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2	1	0
2	1	1	0	2	1	0	2	1	0	2	2	1	0	2
1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2	1

$$F = \{(0,0), (-1,0), (0,-1)\}$$

¿Por qué el nombre “asintóticas”?

¿Por qué el nombre "asintóticas"?

Sea σ la $\mathbb{Z}^d$-acción en $A^{\mathbb{Z}^d}$ dada por

$$\sigma^n(x)(m) = x(n+m) \text{ para todo } n, m \in \mathbb{Z}^d.$$

x, y son asintóticas si para toda secuencia $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{Z}^d$ tal que $\|n_k\| \to \infty$, entonces $d(\sigma^{n_k}(x), \sigma^{n_k}(y)) \to 0$.

¿Por qué el nombre "asintóticas"?

Sea σ la $\mathbb{Z}^d$-acción en $A^{\mathbb{Z}^d}$ dada por

$$\sigma^n(x)(m) = x(n+m) \text{ para todo } n, m \in \mathbb{Z}^d.$$

x, y son asintóticas si para toda secuencia $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{Z}^d$ tal que $\|n_k\| \to \infty$, entonces $d(\sigma^{n_k}(x), \sigma^{n_k}(y)) \to 0$.

$$x = \boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{\color{red}0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}$$

$$y = \boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{\color{red}1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}$$

¿Por qué el nombre “asintóticas”?

Sea σ la $\mathbb{Z}^d$-acción en $A^{\mathbb{Z}^d}$ dada por

$$\sigma^n(x)(m) = x(n+m) \text{ para todo } n, m \in \mathbb{Z}^d.$$

> x, y son asintóticas si para toda secuencia $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{Z}^d$ tal que $\|n_k\| \to \infty$, entonces $d(\sigma^{n_k}(x), \sigma^{n_k}(y)) \to 0$.

$\sigma\ (x) =$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$\sigma\ (y) =$

0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

¿Por qué el nombre "asintóticas"?

Sea σ la $\mathbb{Z}^d$-acción en $A^{\mathbb{Z}^d}$ dada por

$$\sigma^n(x)(m) = x(n+m) \text{ para todo } n, m \in \mathbb{Z}^d.$$

x, y son asintóticas si para toda secuencia $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{Z}^d$ tal que $\|n_k\| \to \infty$, entonces $d(\sigma^{n_k}(x), \sigma^{n_k}(y)) \to 0$.

$\sigma^2(x) =$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\sigma^2(y) =$	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

¿Por qué el nombre “asintóticas”?

Sea σ la $\mathbb{Z}^d$-acción en $A^{\mathbb{Z}^d}$ dada por

$$\sigma^n(x)(m) = x(n+m) \text{ para todo } n, m \in \mathbb{Z}^d.$$

x, y son asintóticas si para toda secuencia $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en $\mathbb{Z}^d$ tal que $\|n_k\| \to \infty$, entonces $d(\sigma^{n_k}(x), \sigma^{n_k}(y)) \to 0$.

$\sigma^3(x) =$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\sigma^3(y) =$	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

¿Por qué el nombre “asintóticas”?

Sea σ la $\mathbb{Z}^d$-acción en $A^{\mathbb{Z}^d}$ dada por

$$\sigma^n(x)(m) = x(n+m) \text{ para todo } n, m \in \mathbb{Z}^d.$$

x, y son asintóticas si para toda secuencia $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{Z}^d$ tal que $\|n_k\| \to \infty$, entonces $d(\sigma^{n_k}(x), \sigma^{n_k}(y)) \to 0$.

$$\sigma^4(x) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&0&0&\color{red}{0}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\\hline\end{array}$$

$$\sigma^4(y) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&0&0&\color{red}{1}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\\hline\end{array}$$

¿Por qué el nombre “asintóticas”?

Sea σ la $\mathbb{Z}^d$-acción en $A^{\mathbb{Z}^d}$ dada por

$$\sigma^n(x)(m) = x(n+m) \text{ para todo } n, m \in \mathbb{Z}^d.$$

x, y son asintóticas si para toda secuencia $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{Z}^d$ tal que $\|n_k\| \to \infty$, entonces $d(\sigma^{n_k}(x), \sigma^{n_k}(y)) \to 0$.

$\sigma^5(x) =$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\sigma^5(y) =$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

¿Por qué el nombre “asintóticas”?

Sea σ la $\mathbb{Z}^d$-acción en $A^{\mathbb{Z}^d}$ dada por

$$\sigma^n(x)(m) = x(n+m) \text{ para todo } n, m \in \mathbb{Z}^d.$$

x, y son asintóticas si para toda secuencia $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{Z}^d$ tal que $\|n_k\| \to \infty$, entonces $d(\sigma^{n_k}(x), \sigma^{n_k}(y)) \to 0$.

$\sigma^6(x) =$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\sigma^6(y) =$	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

¿Por qué el nombre "asintóticas"?

Sea σ la $\mathbb{Z}^d$-acción en $A^{\mathbb{Z}^d}$ dada por

$$\sigma^n(x)(m) = x(n+m) \text{ para todo } n, m \in \mathbb{Z}^d.$$

x, y son asintóticas si para toda secuencia $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{Z}^d$ tal que $\|n_k\| \to \infty$, entonces $d(\sigma^{n_k}(x), \sigma^{n_k}(y)) \to 0$.

$$\sigma^7(x) = \boxed{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}}$$

$$\sigma^7(y) = \boxed{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}}$$

¿Por qué el nombre "asintóticas"?

Sea σ la $\mathbb{Z}^d$-acción en $A^{\mathbb{Z}^d}$ dada por

$$\sigma^n(x)(m) = x(n+m) \text{ para todo } n, m \in \mathbb{Z}^d.$$

x, y son asintóticas si para toda secuencia $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{Z}^d$ tal que $\|n_k\| \to \infty$, entonces $d(\sigma^{n_k}(x), \sigma^{n_k}(y)) \to 0$.

$\sigma^8(x) =$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$\sigma^8(y) =$

0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

¿Por qué el nombre "asintóticas"?

Sea σ la $\mathbb{Z}^d$-acción en $A^{\mathbb{Z}^d}$ dada por

$$\sigma^n(x)(m) = x(n+m) \text{ para todo } n, m \in \mathbb{Z}^d.$$

x, y son asintóticas si para toda secuencia $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{Z}^d$ tal que $\|n_k\| \to \infty$, entonces $d(\sigma^{n_k}(x), \sigma^{n_k}(y)) \to 0$.

$\sigma^9(x) =$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$\sigma^9(y) =$

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

¿Por qué el nombre "asintóticas"?

Sea σ la $\mathbb{Z}^d$-acción en $A^{\mathbb{Z}^d}$ dada por

$$\sigma^n(x)(m) = x(n+m) \text{ para todo } n, m \in \mathbb{Z}^d.$$

x, y son asintóticas si para toda secuencia $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{Z}^d$ tal que $\|n_k\| \to \infty$, entonces $d(\sigma^{n_k}(x), \sigma^{n_k}(y)) \to 0$.

$\sigma^{10}(x) =$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

$\sigma^{10}(y) =$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

- Sean $x, y \in A^{\mathbb{Z}^d}$ asintóticas.
- Dado $S \subset \mathbb{Z}^d$ finito y $p \in A^S$, sea

$$[p] = \{z \in A^{\mathbb{Z}^d} : z|_S = p\}.$$

- Sean $x, y \in A^{\mathbb{Z}^d}$ asintóticas.
- Dado $S \subset \mathbb{Z}^d$ finito y $p \in A^S$, sea

$$[p] = \{z \in A^{\mathbb{Z}^d} : z|_S = p\}.$$

Queremos medir la diferencia en el número de veces que p ocurre en x e y.

- Sean $x, y \in A^{\mathbb{Z}^d}$ asintóticas.
- Dado $S \subset \mathbb{Z}^d$ finito y $p \in A^S$, sea

$$[p] = \{z \in A^{\mathbb{Z}^d} : z|_S = p\}.$$

Queremos medir la diferencia en el número de veces que p ocurre en x e y.

$$\Delta_p(x, y) = \sum_{u \in \mathbb{Z}^d} 1_{[p]}(\sigma^u(y)) - 1_{[p]}(\sigma^u(x)).$$

- Sean $x, y \in A^{\mathbb{Z}^d}$ asintóticas.
- Dado $S \subset \mathbb{Z}^d$ finito y $p \in A^S$, sea

$$[p] = \{z \in A^{\mathbb{Z}^d} : z|_S = p\}.$$

Queremos medir la diferencia en el número de veces que p ocurre en x e y.

$$\Delta_p(x, y) = \sum_{u \in \boxed{F - S}} 1_{[p]}(\sigma^u(y)) - 1_{[p]}(\sigma^u(x)).$$

- Sean $x, y \in A^{\mathbb{Z}^d}$ asintóticas.
- Dado $S \subset \mathbb{Z}^d$ finito y $p \in A^S$, sea

$$[p] = \{z \in A^{\mathbb{Z}^d} : z|_S = p\}.$$

Queremos medir la diferencia en el número de veces que p ocurre en x e y.

$$\Delta_p(x, y) = \sum_{u \in \boxed{F - S}} 1_{[p]}(\sigma^u(y)) - 1_{[p]}(\sigma^u(x)).$$

Decimos que un par asintótico x, y es **indistinguible** si $\Delta_p(x, y) = 0$ para todo patrón p.

Example: Sea $d = 2$ y $S = \{(0,0),(0,1),(1,0),(2,0)\}$.

x

1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2	1
0	2	1	1	0	2	1	0	2	1	0	2	2	1	0
2	1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2
1	0	2	1	1	0	2	1	0	2	1	0	2	2	1
0	2	1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0
2	1	0	2	1	1	0	2	1	0	2	1	0	2	2
1	0	2	1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1
0	2	1	0	2	1	1	0	2	1	0	2	1	0	2
2	1	0	2	1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1
1	0	2	1	0	2	1	0	2	2	1	0	2	1	0
2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2	1	0	2
1	1	0	2	1	0	2	1	0	2	2	1	0	2	1
0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2	1	0
2	1	1	0	2	1	0	2	1	0	2	2	1	0	2
1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2	1

y

1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2	1
0	2	1	1	0	2	1	0	2	1	0	2	2	1	0
2	1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2
1	0	2	1	1	0	2	1	0	2	1	0	2	2	1
0	2	1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0
2	1	0	2	1	1	0	2	1	0	2	1	0	2	2
1	0	2	1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1
0	2	1	0	2	1	0	2	2	1	0	2	1	0	2
2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2	1	0	2	1
1	0	2	1	0	2	1	0	2	2	1	0	2	1	0
2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2	1	0	2
1	1	0	2	1	0	2	1	0	2	2	1	0	2	1
0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2	1	0
2	1	1	0	2	1	0	2	1	0	2	2	1	0	2
1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2	1

Example: Sea $d = 2$ y $S = \{(0,0),(0,1),(1,0),(2,0)\}$.

x

0	2	2	1	0	2
2	1	1	0	2	1
1	0	2	2	1	0
0	2	1	0	2	2

y

0	2	2	1	0	2
2	1	0	2	2	1
1	0	2	1	1	0
0	2	1	0	2	2

Example: Sea $d = 2$ y $S = \{(0,0),(0,1),(1,0),(2,0)\}$.

x

0	2	2	1	0	2
2	1	1	0	2	1
1	0	2	2	1	0
0	2	1	0	2	2

y

0	2	2	1	0	2
2	1	0	2	2	1
1	0	2	1	1	0
0	2	1	0	2	2

Example: Sea $d = 2$ y $S = \{(0,0),(0,1),(1,0),(2,0)\}$.

x

0	2	2	1	0	2
2	1	1	0	2	1
1	0	2	2	1	0
0	2	1	0	2	2

y

0	2	2	1	0	2
2	1	0	2	2	1
1	0	2	1	1	0
0	2	1	0	2	2

Example: Sea $d = 2$ y $S = \{(0,0),(0,1),(1,0),(2,0)\}$.

x

0	2	2	1	0	2
2	1	1	0	2	1
1	0	2	2	1	0
0	2	1	0	2	2

y

0	2	2	1	0	2
2	1	0	2	2	1
1	0	2	1	1	0
0	2	1	0	2	2

Example: Sea $d = 2$ y $S = \{(0,0),(0,1),(1,0),(2,0)\}$.

x

0	2	2	1	0	2
2	1	1	0	2	1
1	0	2	2	1	0
0	2	1	0	2	2

y

0	2	2	1	0	2
2	1	0	2	2	1
1	0	2	1	1	0
0	2	1	0	2	2

Example: Sea $d = 2$ y $S = \{(0,0),(0,1),(1,0),(2,0)\}$.

x

0	2	2	1	0	2
2	1	1	0	2	1
1	0	2	2	1	0
0	2	1	0	2	2

y

0	2	2	1	0	2
2	1	0	2	2	1
1	0	2	1	1	0
0	2	1	0	2	2

Example: Sea $d = 2$ y $S = \{(0,0),(0,1),(1,0),(2,0)\}$.

x

0	2	2	1	0	2
2	1	1	0	2	1
1	0	2	2	1	0
0	2	1	0	2	2

y

0	2	2	1	0	2
2	1	0	2	2	1
1	0	2	1	1	0
0	2	1	0	2	2

Example: Sea $d = 2$ y $S = \{(0,0),(0,1),(1,0),(2,0)\}$.

x

0	2	2	1	0	2
2	1	1	0	2	1
1	0	2	2	1	0
0	2	1	0	2	2

y

0	2	2	1	0	2
2	1	0	2	2	1
1	0	2	1	1	0
0	2	1	0	2	2

Example: Sea $d = 2$ y $S = \{(0,0),(0,1),(1,0),(2,0)\}$.

x

0	2	2	1	0	2
2	1	1	0	2	1
1	0	2	$\boxed{2}$	1	0
0	2	1	$\boxed{0}$	$\boxed{2}$	$\boxed{2}$

y

0	2	$\boxed{2}$	1	0	2
2	1	$\boxed{0}$	$\boxed{2}$	$\boxed{2}$	1
1	0	2	1	1	0
0	2	1	0	2	2

Example: Sea $d = 2$ y $S = \{(0,0),(0,1),(1,0),(2,0)\}$.

x

0	2	2	1	0	2
2	1	1	0	2	1
1	0	2	$\boxed{2}$	1	0
0	2	1	$\boxed{0}$	$\boxed{2}$	$\boxed{2}$

y

0	2	$\boxed{2}$	1	0	2
2	1	$\boxed{0}$	$\boxed{2}$	$\boxed{2}$	1
1	0	2	1	1	0
0	2	1	0	2	2

Luego $\Delta_p(x, y) = 0$ para todo patrón p con soporte S.

Ejemplos:

- (x, x) es indistinguible para cualquier $x \in A^{\mathbb{Z}^d}$.
- Si $x, y \in A^{\mathbb{Z}^d}$ son asintóticas y están en la misma órbita $(\sigma^n(y) = x$ para algún $n \in \mathbb{Z}^d)$ entonces son indistinguibles.

x

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

y

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

¿Existe algún par asintótico indistinguible que no caiga en los casos anteriores?

Propiedades (en $\mathbb{Z}$)

Sea x, y un par asintótico indistinguible con $x \neq y$ y conjunto de diferencia F.

Si x no es recurrente, entonces x e y están en la misma órbita.

Propiedades (en $\mathbb{Z}$)

Sea x, y un par asintótico indistinguible con $x \neq y$ y conjunto de diferencia F.

Si x no es recurrente, entonces x e y están en la misma órbita.

Todo patrón que ocurra en x debe ocurrir intersectando a F.

Propiedades (en $\mathbb{Z}$)

Sea x, y un par asintótico indistinguible con $x \neq y$ y conjunto de diferencia F.

Si x no es recurrente, entonces x e y están en la misma órbita.

Todo patrón que ocurra en x debe ocurrir intersectando a F.

Si x es recurrente, entonces x e y son uniformemente recurrentes.

Propiedades (en $\mathbb{Z}$)

Sea x, y un par asintótico indistinguible con $x \neq y$ y conjunto de diferencia F.

Si x no es recurrente, entonces x e y están en la misma órbita.

Todo patrón que ocurra en x debe ocurrir intersectando a F.

Si x es recurrente, entonces x e y son uniformemente recurrentes.

Si x es recurrente y $F = \{0, 1\}$, entonces la complejidad de x e y está dada por $n + 1$, es decir, deben ser palabras Sturmianas.

Propiedades (en $\mathbb{Z}$)

Sea x, y un par asintótico indistinguible con $x \neq y$ y conjunto de diferencia F.

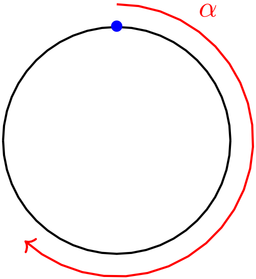
Si x no es recurrente, entonces x e y están en la misma órbita.

Todo patrón que ocurra en x debe ocurrir intersectando a F.

Si x es recurrente, entonces x e y son uniformemente recurrentes.

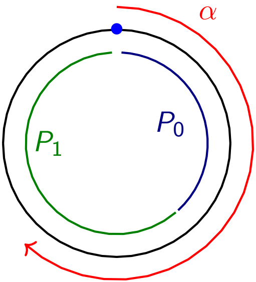
Si x es recurrente y $F = \{0, 1\}$, entonces la complejidad de x e y está dada por $n + 1$, es decir, deben ser palabras Sturmianas.

Sea $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Consideremos la rotación $R_\alpha \colon S^1 \to S^1$ dada por $R_\alpha(x) = x + \alpha$.
Consideremos la partición $\mathcal{P} = \{P_0 = [0, 1-\alpha), P_1 = [1-\alpha, 1)\}$.



$\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

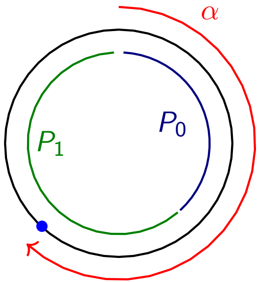
Sea $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Consideremos la rotación $R_\alpha \colon S^1 \to S^1$ dada por $R_\alpha(x) = x + \alpha$.
Consideremos la partición $\mathcal{P} = \{P_0 = [0, 1-\alpha), P_1 = [1-\alpha, 1)\}$.



$\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

$\varphi(x) = \ldots 0 \ldots$

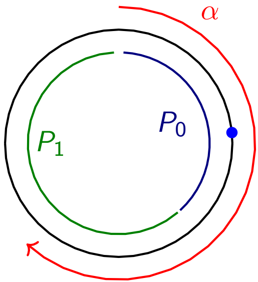
Sea $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Consideremos la rotación $R_\alpha \colon S^1 \to S^1$ dada por $R_\alpha(x) = x + \alpha$.
Consideremos la partición $\mathcal{P} = \{P_0 = [0, 1-\alpha), P_1 = [1-\alpha, 1)\}$.



$$\alpha = \tfrac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

$\varphi(x) = \ldots 01 \ldots$

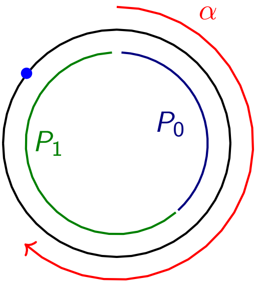
Sea $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Consideremos la rotación $R_\alpha \colon S^1 \to S^1$ dada por $R_\alpha(x) = x + \alpha$.
Consideremos la partición $\mathcal{P} = \{P_0 = [0, 1-\alpha), P_1 = [1-\alpha, 1)\}$.



$\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

$\varphi(x) = \ldots 010 \ldots$

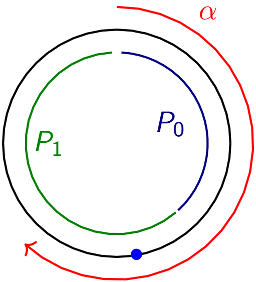
Sea $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Consideremos la rotación $R_\alpha \colon S^1 \to S^1$ dada por $R_\alpha(x) = x + \alpha$.
Consideremos la partición $\mathcal{P} = \{P_0 = [0, 1-\alpha), P_1 = [1-\alpha, 1)\}$.



$\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

$\varphi(x) = \ldots 0101 \ldots$

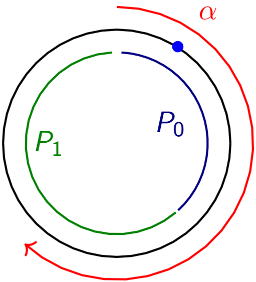
Sea $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Consideremos la rotación $R_\alpha \colon S^1 \to S^1$ dada por $R_\alpha(x) = x + \alpha$.
Consideremos la partición $\mathcal{P} = \{P_0 = [0, 1-\alpha), P_1 = [1-\alpha, 1)\}$.



$\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

$\varphi(x) = \ldots 01011 \ldots$

Sea $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Consideremos la rotación $R_\alpha : S^1 \to S^1$ dada por $R_\alpha(x) = x + \alpha$.
Consideremos la partición $\mathcal{P} = \{P_0 = [0, 1-\alpha), P_1 = [1-\alpha, 1)\}$.

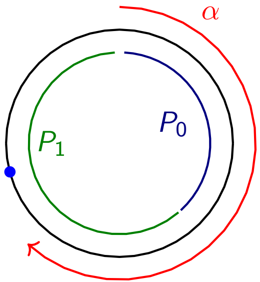


$\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

$\varphi(x) = \dots 010110 \dots$

Sea $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Consideremos la rotación $R_\alpha \colon S^1 \to S^1$ dada por $R_\alpha(x) = x + \alpha$.

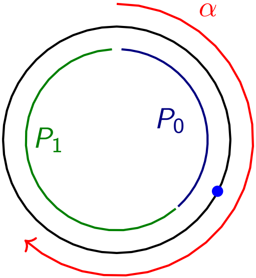
Consideremos la partición $\mathcal{P} = \{P_0 = [0, 1-\alpha), P_1 = [1-\alpha, 1)\}$.



$\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

$\varphi(x) = \ldots 0101101 \ldots$

Sea $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Consideremos la rotación $R_\alpha \colon S^1 \to S^1$ dada por $R_\alpha(x) = x + \alpha$.
Consideremos la partición $\mathcal{P} = \{P_0 = [0, 1-\alpha), P_1 = [1-\alpha, 1)\}$.

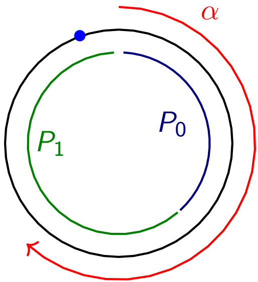


$$\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

$\varphi(x) = \ldots 01011010 \ldots$

Sea $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Consideremos la rotación $R_\alpha \colon S^1 \to S^1$ dada por $R_\alpha(x) = x + \alpha$.

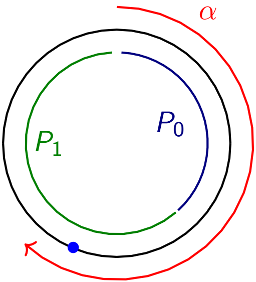
Consideremos la partición $\mathcal{P} = \{P_0 = [0, 1-\alpha), P_1 = [1-\alpha, 1)\}$.



$$\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

$\varphi(x) = \ldots 010110101 \ldots$

Sea $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Consideremos la rotación $R_\alpha \colon S^1 \to S^1$ dada por $R_\alpha(x) = x + \alpha$.
Consideremos la partición $\mathcal{P} = \{P_0 = [0, 1-\alpha), P_1 = [1-\alpha, 1)\}$.



$$\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

$$\varphi(x) = \dots 0101101011 \dots$$

Formalmente, dado $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ sea $c_\alpha \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ dada por

$$c_\alpha(n) = \lfloor \alpha(n+1) \rfloor - \lfloor \alpha n \rfloor.$$

Formalmente, dado $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ sea $c_\alpha \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ dada por

$$c_\alpha(n) = \lfloor \alpha(n+1) \rfloor - \lfloor \alpha n \rfloor.$$

Si tomamos la partición $\mathcal{P}' = \{P_0 = (0, 1-\alpha], (1-\alpha, 1]\}$ entonces obtenemos

$$c'_\alpha(n) = \lceil \alpha(n+1) \rceil - \lceil \alpha n \rceil.$$

Formalmente, dado $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ sea $c_\alpha \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ dada por

$$c_\alpha(n) = \lfloor \alpha(n+1) \rfloor - \lfloor \alpha n \rfloor.$$

Si tomamos la partición $\mathcal{P}' = \{P_0 = (0, 1-\alpha], (1-\alpha, 1]\}$ entonces obtenemos

$$c'_\alpha(n) = \lceil \alpha(n+1) \rceil - \lceil \alpha n \rceil.$$

A las configuraciones c_α, c'_α se les dice **Sturmianas características de pendiente** α.

El par (c_α, c'_α) es asintótico con diferencia $F = \{-1, 0\}$.

Formalmente, dado $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ sea $c_\alpha \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ dada por

$$c_\alpha(n) = \lfloor \alpha(n+1) \rfloor - \lfloor \alpha n \rfloor.$$

Si tomamos la partición $\mathcal{P}' = \{P_0 = (0, 1-\alpha], (1-\alpha, 1]\}$ entonces obtenemos

$$c'_\alpha(n) = \lceil \alpha(n+1) \rceil - \lceil \alpha n \rceil.$$

A las configuraciones c_α, c'_α se les dice **Sturmianas características de pendiente** α.

El par (c_α, c'_α) es asintótico con diferencia $F = \{-1, 0\}$.

El par (c_α, c'_α) es indistinguible. De hecho, cada patrón en su lenguaje ocurre exactamente una vez intersectando el conjunto de diferencias.

Teorema: B, Labbé and Starosta

Sean $x, y \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ y supongamos que x es recurrente.

(x, y) es indistinguible con diferencia $F = \{-1, 0\}$ y tal que $x_{-1}x_0 = 10$, $y_{-1}y_0 = 01$.

$$\Updownarrow$$

Existe $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ tal que $x = c_\alpha$, $y = c'_\alpha$ son las secuencias Sturmianas características de pendiente α.

Teorema: B, Labbé and Starosta

Sean $x, y \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ y supongamos que x es recurrente.

(x, y) es indistinguible con diferencia $F = \{-1, 0\}$ y tal que $x_{-1}x_0 = 10$, $y_{-1}y_0 = 01$.

$$\Updownarrow$$

Existe $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ tal que $x = c_\alpha$, $y = c'_\alpha$ son las secuencias Sturmianas características de pendiente α.

Pero hay más...

Teorema: B, Labbé and Starosta

Sea A finito, $x, y \in A^{\mathbb{Z}}$ un par asintótico con $x \neq y$. Entonces x, y es indistinguible si y solamente si una de las dos afirmaciones siguientes se cumple:

- x es recurrente, y existe $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$, una substitución $\varphi\colon \{0,1\} \to A^+$ y un entero $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\{x, y\} = \{\sigma^m \varphi(\sigma(c_\alpha)), \sigma^m \varphi(\sigma(c'_\alpha))\},$$

- x no es recurrente y existe una substitución $\varphi\colon \{0,1\} \to A^+$ y un entero $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\{x, y\} = \{\sigma^m \varphi({}^\infty 0.10^\infty), \sigma^m \varphi({}^\infty 0.010^\infty)\}.$$

¿Que pasa con $\mathbb{Z}^d$ para $d \geq 2$?

Todo es más difícil:

- Los patrones pueden ocurrir sin intersectar el conjunto de diferencia
- Hay pares indistinguibles recurrentes pero no uniformemente recurrentes
- No se puede usar substituciones para reducir el tamaño del problema.

Ejemplo:

x

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

y

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

La configuración horizontal es indistinguible, el resto es 2.

Ejemplo:

x

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

y

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

La configuración horizontal es indistinguible, el resto es 2.

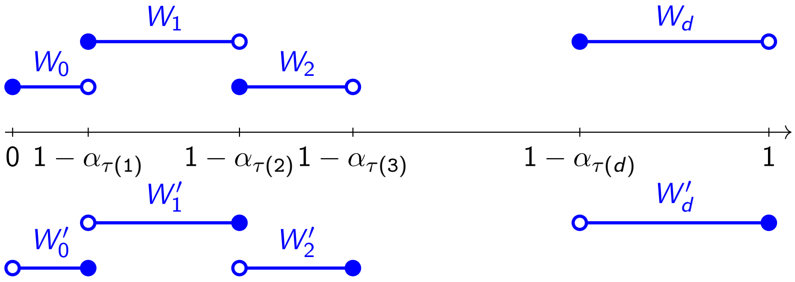
- Recurrente pero no uniformemente recurrente.
- El patrón '2' no ocurre en F.

Configuraciones Sturmianas multidimensionales

Sea $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in [0,1]^d$, tomemos $\tau \in S_d$ tal que

$$1 \geq \alpha_{\tau(1)} \geq \alpha_{\tau(2)} \geq \cdots \geq \alpha_{\tau(d)} \geq 0.$$

c_α, c'_α son las codificaciones de la órbita de 0 bajo la acción $n \mapsto \langle \alpha, n \rangle$ usando las particiones $\mathcal{W}$ y $\mathcal{W}'$ respectivamente.



Explícitamente, dado $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ tenemos

$$\begin{array}{rccl} c_\alpha : & \mathbb{Z}^d & \to & \{\mathtt{0}, \ldots, \mathtt{d}\} \\ & n & \mapsto & \sum_{i=1}^{d} \left(\lfloor \alpha_i + n \cdot \alpha \rfloor - \lfloor n \cdot \alpha \rfloor \right), \\ c'_\alpha : & \mathbb{Z}^d & \to & \{\mathtt{0}, \ldots, \mathtt{d}\} \\ & n & \mapsto & \sum_{i=1}^{d} \left(\lceil \alpha_i + n \cdot \alpha \rceil - \lceil n \cdot \alpha \rceil \right). \end{array}$$

Explícitamente, dado $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ tenemos

$$\begin{array}{rccl} c_\alpha : & \mathbb{Z}^d & \to & \{\mathtt{0}, \ldots, \mathtt{d}\} \\ & n & \mapsto & \sum_{i=1}^{d} \left(\lfloor \alpha_i + n \cdot \alpha \rfloor - \lfloor n \cdot \alpha \rfloor \right), \\ c'_\alpha : & \mathbb{Z}^d & \to & \{\mathtt{0}, \ldots, \mathtt{d}\} \\ & n & \mapsto & \sum_{i=1}^{d} \left(\lceil \alpha_i + n \cdot \alpha \rceil - \lceil n \cdot \alpha \rceil \right). \end{array}$$

c_α, c'_α son asintóticas con diferencia $F = \{0, -e_1, \ldots, -e_d\}$.

x

1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2	1
0	2	1	1	0	2	1	0	2	1	0	2	2	1	0
2	1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2
1	0	2	1	1	0	2	1	0	2	1	0	2	2	1
0	2	1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0
2	1	0	2	1	1	0	2	1	0	2	1	0	2	2
1	0	2	1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1
0	2	1	0	2	1	1	0	2	1	0	2	1	0	2
2	1	0	2	1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1
1	0	2	1	0	2	1	0	2	2	1	0	2	1	0
2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2	1	0	2
1	1	0	2	1	0	2	1	0	2	2	1	0	2	1
0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2	1	0
2	1	1	0	2	1	0	2	1	0	2	2	1	0	2
1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2	1

y

1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2	1
0	2	1	1	0	2	1	0	2	1	0	2	2	1	0
2	1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2
1	0	2	1	1	0	2	1	0	2	1	0	2	2	1
0	2	1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0
2	1	0	2	1	1	0	2	1	0	2	1	0	2	2
1	0	2	1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1
0	2	1	0	2	1	0	2	2	1	0	2	1	0	2
2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2	1	0	2	1
1	0	2	1	0	2	1	0	2	2	1	0	2	1	0
2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2	1	0	2
1	1	0	2	1	0	2	1	0	2	2	1	0	2	1
0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2	1	0
2	1	1	0	2	1	0	2	1	0	2	2	1	0	2
1	0	2	2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2	1

Acá $x = c_\alpha$, $y = c'_\alpha$ para

$$\alpha = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{19} - 4\right).$$

Teorema: B and Labbé.

Sea $d \geq 1$, $x, y \in \{0, \ldots, \mathtt{d}\}^{\mathbb{Z}^d}$ asintóticas tal que x es uniformemente recurrente y que satisfacen la **flip condition** con diferencia $F = \{0, -e_1, \ldots, -e_d\}$. TFAE:

1. (x, y) es indistinguible.
2. Para todo $S \subset \mathbb{Z}^d$ finito, conexo y no vacío y $p \in \mathcal{L}_S(x) \cup \mathcal{L}_S(y)$, p intersecta el conjunto de diferencias F exactamente una vez en x e y.
3. Para todo $S \subset \mathbb{Z}^d$ finito, conexo y no vacío, tenemos que
$$|\mathcal{L}_S(x)| = |\mathcal{L}_S(y)| = |F - S|.$$
4. Existe un vector $\alpha \in [0, 1)^d$ totalmente irracional tal que $x = c_\alpha$ e $y = c'_\alpha$ son las configuraciones **Sturmianas multidimensionales características** de pendiente α.

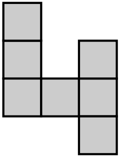
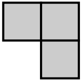
Para cada $S \subset \mathbb{Z}^d$, tenemos que la complejidad está dada por

$$|\mathcal{L}_S(x)| = |\mathcal{L}_S(y)| = |F - S|.$$

Para cada $S \subset \mathbb{Z}^d$, tenemos que la complejidad está dada por

$$|\mathcal{L}_S(x)| = |\mathcal{L}_S(y)| = |F - S|.$$

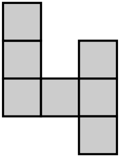
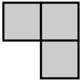
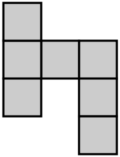
Por ejemplo, si $c_\alpha \in \{0,1,2\}^{\mathbb{Z}^d}$ y necesitamos saber cuantos patrones de soporte $S \Subset \mathbb{Z}^2$ hay.

$S =$  $F =$  $F - S =$

Para cada $S \subset \mathbb{Z}^d$, tenemos que la complejidad está dada por

$$|\mathcal{L}_S(x)| = |\mathcal{L}_S(y)| = |F - S|.$$

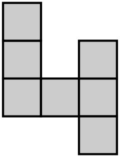
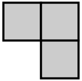
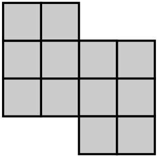
Por ejemplo, si $c_\alpha \in \{0, 1, 2\}^{\mathbb{Z}^d}$ y necesitamos saber cuantos patrones de soporte $S \Subset \mathbb{Z}^2$ hay.

$S =$  $F =$  $F - S =$ 

Para cada $S \subset \mathbb{Z}^d$, tenemos que la complejidad está dada por

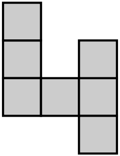
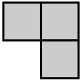
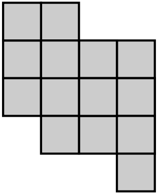
$$|\mathcal{L}_S(x)| = |\mathcal{L}_S(y)| = |F - S|.$$

Por ejemplo, si $c_\alpha \in \{0,1,2\}^{\mathbb{Z}^d}$ y necesitamos saber cuantos patrones de soporte $S \Subset \mathbb{Z}^2$ hay.

$S =$  $F =$  $F - S =$ 

> Para cada $S \subset \mathbb{Z}^d$, tenemos que la complejidad está dada por
>
> $$|\mathcal{L}_S(x)| = |\mathcal{L}_S(y)| = |F - S|.$$

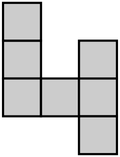
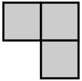
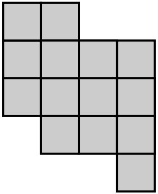
Por ejemplo, si $c_\alpha \in \{0,1,2\}^{\mathbb{Z}^d}$ y necesitamos saber cuantos patrones de soporte $S \Subset \mathbb{Z}^2$ hay.

$S =$  $F =$  $F - S =$ 

Para cada $S \subset \mathbb{Z}^d$, tenemos que la complejidad está dada por

$$|\mathcal{L}_S(x)| = |\mathcal{L}_S(y)| = |F - S|.$$

Por ejemplo, si $c_\alpha \in \{0, 1, 2\}^{\mathbb{Z}^d}$ y necesitamos saber cuantos patrones de soporte $S \Subset \mathbb{Z}^2$ hay.

$S =$  $F =$  $F - S =$ 

Hay exactamente 14 patrones con soporte S en una configuración Sturmiana 2-dimensional.

Sea $(m_1, \ldots, m_d) \in \mathbb{N}^d$ y consideremos el rectángulo

$$R = \prod_{i=1}^{d} [\![0, m_i - 1]\!].$$

En este caso obtenemos una bella fórmula para la complejidad de una configuración multidimensional Sturmiana x

$$|\mathcal{L}_R(x)| = |\mathcal{L}_{(m_1,\ldots,m_d)}(x)| = m_1 \cdots m_d \left(1 + \frac{1}{m_1} + \cdots + \frac{1}{m_d}\right).$$

Sea $(m_1, \ldots, m_d) \in \mathbb{N}^d$ y consideremos el rectángulo

$$R = \prod_{i=1}^{d} [\![0, m_i - 1]\!].$$

En este caso obtenemos una bella fórmula para la complejidad de una configuración multidimensional Sturmiana x

$$|\mathcal{L}_R(x)| = |\mathcal{L}_{(m_1,\ldots,m_d)}(x)| = m_1 \cdots m_d \left(1 + \frac{1}{m_1} + \cdots + \frac{1}{m_d}\right).$$

Podemos interpretarlo como $|F - R|$, lo cual es el volumen de R, más el volumen de cada una de las caras $d-1$ dimensionales.

Sea $(m_1, \ldots, m_d) \in \mathbb{N}^d$ y consideremos el rectángulo

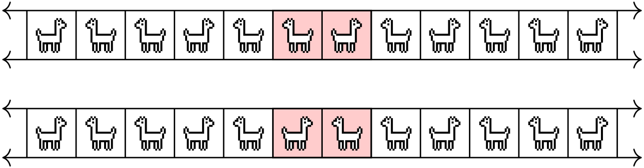
$$R = \prod_{i=1}^{d} [\![0, m_i - 1]\!].$$

En este caso obtenemos una bella fórmula para la complejidad de una configuración multidimensional Sturmiana x

$$|\mathcal{L}_R(x)| = |\mathcal{L}_{(m_1,\ldots,m_d)}(x)| = m_1 \cdots m_d \left(1 + \frac{1}{m_1} + \cdots + \frac{1}{m_d}\right).$$

Podemos interpretarlo como $|F - R|$, lo cual es el volumen de R, más el volumen de cada una de las caras $d - 1$ dimensionales.
$\triangleright$ Para $d = 1$ recuperamos $\mathcal{L}_n(x) = n + 1$.

Gracias!



Indistinguishable asymptotic pairs and multidimensional Sturmian configurations.

S. Barbieri, S. Labbé

https://arxiv.org/abs/2204.06413

A characterization of Sturmian sequences by indistinguishable asymptotic pairs

S. Barbieri, S. Labbé, Š. Starosta

https://doi.org/10.1016/j.ejc.2021.103318

Flip Condition

Decimos que $x, y \in \{0, \ldots, \mathtt{d}\}^{\mathbb{Z}^d}$ satisface la **flip condition** si:

1. $F = \{0, -e_1, \ldots, -e_d\}$,
2. La restricción $x|_F$ es una biyección $F \to \{0, \ldots, \mathtt{d}\}$ tal que $x_0 = 0$,
3. $y_n = x_n - 1 \bmod (d+1)$ para cada $n \in F$.

Flip Condition

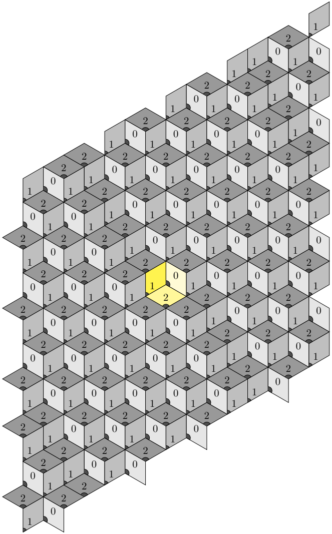
Decimos que $x, y \in \{0, \ldots, \mathtt{d}\}^{\mathbb{Z}^d}$ satisface la **flip condition** si:

1. $F = \{0, -e_1, \ldots, -e_d\}$,
2. La restricción $x|_F$ es una biyección $F \to \{0, \ldots, \mathtt{d}\}$ tal que $x_0 = 0$,
3. $y_n = x_n - 1 \mod (d+1)$ para cada $n \in F$.

Las condiciones anteriores inducen una permutación cíclica en $\{0, \ldots, \mathtt{d}\}$ dada por $y_n \mapsto x_n$ para $n \in F$.

La **flip condition** se puede interpretar como una operación en el hypercubo unitario en un subespacio discreto de co-dimension 1.

x



y