Acciones calculables de grupos y su dinámica

Sebastián **Barbieri Lemp**

Universidad de Santiago de Chile

Seminario de Grupos y Geometría

Octubre, 2020

Una pincelada de computación

Supongamos que estamos enseñando un curso de cálculo y hablamos de la noción de función.

Una pincelada de computación

Supongamos que estamos enseñando un curso de cálculo y hablamos de la noción de función.

- Profesor: $f : X \to Y$ es una relación $f \subseteq X \times Y$ con ciertas propiedades.

Una pincelada de computación

Supongamos que estamos enseñando un curso de cálculo y hablamos de la noción de función.

- Profesor: $f : X \to Y$ es una relación $f \subseteq X \times Y$ con ciertas propiedades.
- Estudiante: $f(x) = y$ es una *regla* explícita o *fórmula* que asocia a x un valor particular: $\sin(x)$, e^x, $2x + 1$, etc.

Una pincelada de computación

Supongamos que estamos enseñando un curso de cálculo y hablamos de la noción de función.

- Profesor: $f : X \to Y$ es una relación $f \subseteq X \times Y$ con ciertas propiedades.
- Estudiante: $f(x) = y$ es una *regla* explícita o *fórmula* que asocia a x un valor particular: $\sin(x)$, e^x, $2x + 1$, etc.

¿Cómo formalizar la noción de regla explícita? -Algoritmo.

Algoritmo

Informalmente, un algoritmo es un conjunto finito de reglas que se aplican secuencialmente sin limitación de tiempo ni de memoria.

Algoritmo

Informalmente, un algoritmo es un conjunto finito de reglas que se aplican secuencialmente sin limitación de tiempo ni de memoria.

Ejemplos

$\triangleright$ Dado un número $n \in \mathbb{N}$ en binario, calcular n^2 en binario.

Algoritmo

Informalmente, un algoritmo es un conjunto finito de reglas que se aplican secuencialmente sin limitación de tiempo ni de memoria.

Ejemplos

$\triangleright$ Dado un número $n \in \mathbb{N}$ en binario, calcular n^2 en binario.
$\triangleright$ Diagonalizar una matriz simétrica con entradas racionales 1000×1000 con lápiz y papel sin cometer errores.

Algoritmo

Informalmente, un algoritmo es un conjunto finito de reglas que se aplican secuencialmente sin limitación de tiempo ni de memoria.

Ejemplos

$\triangleright$ Dado un número $n \in \mathbb{N}$ en binario, calcular n^2 en binario.
$\triangleright$ Diagonalizar una matriz simétrica con entradas racionales 1000×1000 con lápiz y papel sin cometer errores.
$\triangleright$ Factorizar un natural en sus componentes primos.

Algoritmo

Informalmente, un algoritmo es un conjunto finito de reglas que se aplican secuencialmente sin limitación de tiempo ni de memoria.

Ejemplos

$\triangleright$ Dado un número $n \in \mathbb{N}$ en binario, calcular n^2 en binario.
$\triangleright$ Diagonalizar una matriz simétrica con entradas racionales 1000×1000 con lápiz y papel sin cometer errores.
$\triangleright$ Factorizar un natural en sus componentes primos.

Una (de muchas) formalizaciones de este concepto es la máquina de Turing.

Máquinas de Turing: dinámica

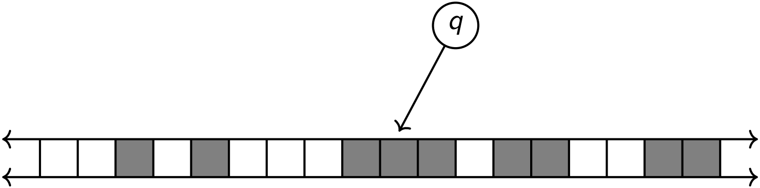
Una máquina de Turing T está esencialmente definida por:

- Un onjunto finito Σ (alfabeto).
- Un conjunto finito Q (estados).
- Una función (regla) $\delta_T : \Sigma \times Q \to \Sigma \times Q \times \{-1, 0, 1\}$.

Máquinas de Turing: dinámica

Una máquina de Turing T está esencialmente definida por:

- Un onjunto finito Σ (alfabeto).
- Un conjunto finito Q (estados).
- Una función (regla) $\delta_T : \Sigma \times Q \to \Sigma \times Q \times \{-1, 0, 1\}$.

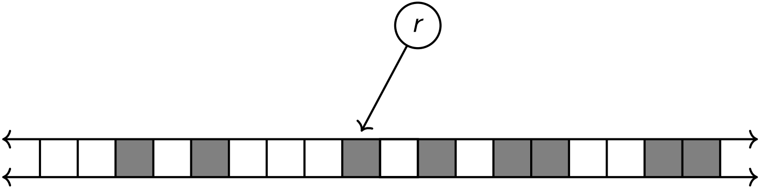


$$\delta_T(\blacksquare, q) = (\square, r, -1)$$

Máquinas de Turing: dinámica

Una máquina de Turing T está esencialmente definida por:

- Un onjunto finito Σ (alfabeto).
- Un conjunto finito Q (estados).
- Una función (regla) $\delta_T : \Sigma \times Q \to \Sigma \times Q \times \{-1, 0, 1\}$.

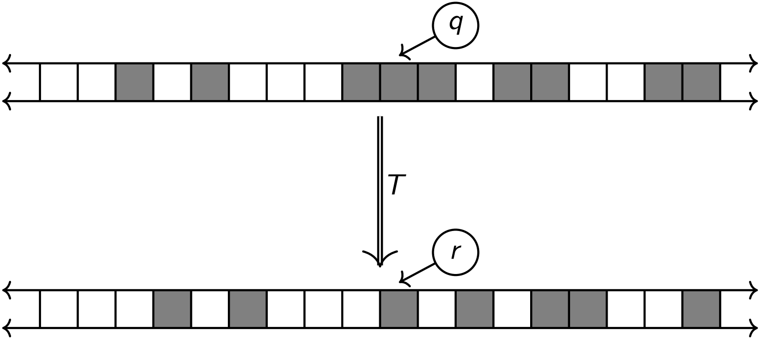


$$\delta_T(\blacksquare, q) = (\square, r, -1)$$

Máquinas de Turing: dinámica

Esta regla define una función:

$$T : \Sigma^{\mathbb{Z}} \times Q \to \Sigma^{\mathbb{Z}} \times Q.$$



Esta regla define una función:

$$T\colon \Sigma^{\mathbb{Z}} \times Q \to \Sigma^{\mathbb{Z}} \times Q.$$

Tal que si $(x, q) \in \Sigma^{\mathbb{Z}} \times Q$ y $\delta_T(x_0, q) = (a, r, d)$ entonces:

$$T(x, q) = (\sigma_{-d}(\tilde{x}), r)$$

donde $\tilde{x}_0 = a$ y $\tilde{x}|_{\mathbb{Z}\setminus\{0\}} = x|_{\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$.

Máquinas de Turing: aceptación

- También distinguimos dos estados especiales en Q. Un estado inicial q_I y un estado de parada q_F.
- Asumamos que el alfabeto Σ contiene un símbolo especial $\sqcup$ representando el blanco.

- También distinguimos dos estados especiales en Q. Un estado inicial q_I y un estado de parada q_F.
- Asumamos que el alfabeto Σ contiene un símbolo especial $\sqcup$ representando el blanco.

Sea $w \in (\Sigma \setminus \{\sqcup\})^*$. Una MT T acepta a w si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^n(\sqcup^\infty.w\sqcup^\infty, q_I) \in \Sigma^{\mathbb{Z}} \times \{q_F\}.$$

Máquinas de Turing: aceptación

- También distinguimos dos estados especiales en Q. Un estado inicial q_I y un estado de parada q_F.
- Asumamos que el alfabeto Σ contiene un símbolo especial $\sqcup$ representando el blanco.

Sea $w \in (\Sigma \setminus \{\sqcup\})^*$. Una MT T acepta a w si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^n(\sqcup^\infty.w\sqcup^\infty, q_I) \in \Sigma^{\mathbb{Z}} \times \{q_F\}.$$

Es decir, w es aceptada por T si comenzando en la configuración que contiene a w en el origen y símbolos blancos alrededor, se llega eventualmente al estado q_F.

Sea $L \subset (\Sigma \setminus \{\sqcup\})^*$ un lenguaje.

Definición

- Decimos que L es **recursivamente enumerable (RE)** si existe una MT T tal que:

$$w \in L \text{ si y solamente si } w \text{ es aceptada por } T.$$

- Si $(\Sigma \setminus \{\sqcup\})^* \setminus L$ es RE, decimos que L es **co-recursivamente enumerable (co-RE)**
- Si L es RE y co-RE, decimos que es **decidible**.

Ejemplos de lenguajes decidibles

- El lenguaje $L \subset \{0, 1\}^*$ de los números naturales en base 2 que son divisibles por 8 es decidible.

Ejemplos de lenguajes decidibles

- El lenguaje $L \subset \{0,1\}^*$ de los números naturales en base 2 que son divisibles por 8 es decidible.
- El lenguaje de los números naturales n en base 2 tal que $\underbrace{666\ldots 6}_{n\text{-veces}}$ aparece en el desarrollo en binario de π es decidible.

Ejemplos de lenguajes decidibles

- El lenguaje $L \subset \{0,1\}^*$ de los números naturales en base 2 que son divisibles por 8 es decidible.
- El lenguaje de los números naturales n en base 2 tal que $\underbrace{666\ldots6}_{n\text{-veces}}$ aparece en el desarrollo en binario de π es decidible.
- El lenguaje de las palabras $w \in \{a,b\}^*$ tales que si $a = 1$ y $b = -1$ y la concatenación se interpreta como la suma en $\mathbb{Z}$ entonces $w = 0$.

La noción de calculabilidad se puede aplicar en grupos de muchas maneras. La más simple es la siguiente.

Definición: Problema de la palabra

Sea Γ un grupo finitamente generado (como semigrupo) por un conjunto S. El problema de la palabra de Γ es el lenguaje

$$\mathtt{WP}(\Gamma, S) = \{w \in S^* : w =_\Gamma 1\}.$$

La noción de calculabilidad se puede aplicar en grupos de muchas maneras. La más simple es la siguiente.

Definición: Problema de la palabra

Sea Γ un grupo finitamente generado (como semigrupo) por un conjunto S. El problema de la palabra de Γ es el lenguaje

$$\mathtt{WP}(\Gamma, S) = \{w \in S^* : w =_\Gamma 1\}.$$

si $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ y $S = \{a = (1,0), b = (0,1), c = (-1,0), d = (0,-1)\}$ entonces

$$\mathtt{WP}(\Gamma, S) = \{w \in \{a,b,c,d\}^* : |a|_w = |c|_w \text{ y } |b|_w = |d|_w\}.$$

Nota: Desde el punto de vista de la calculabilidad, Si S y S' son dos generadores distintos de Γ, entonces $\mathtt{WP}(\Gamma, S) \cong \mathtt{WP}(\Gamma, S')$. Luego se habla del problema de la palabra $\mathtt{WP}(\Gamma)$.

Nota: Desde el punto de vista de la calculabilidad, Si S y S' son dos generadores distintos de Γ, entonces $\mathtt{WP}(\Gamma, S) \cong \mathtt{WP}(\Gamma, S')$. Luego se habla del problema de la palabra $\mathtt{WP}(\Gamma)$.

Definición

- Un grupo f.g. Γ se dice recursivamente presentado si $\mathtt{WP}(\Gamma)$ es recursivamente enumerable.

> "Existe un algoritmo al que dado $n \in \mathbb{N}$ produce una secuencia de aproximaciones de las bolas de radio n del grafo de Cayley de Γ que converge (no sabemos cuando)"

Nota: Desde el punto de vista de la calculabilidad, Si S y S' son dos generadores distintos de Γ, entonces $\texttt{WP}(\Gamma, S) \cong \texttt{WP}(\Gamma, S')$. Luego se habla del problema de la palabra $\texttt{WP}(\Gamma)$.

Definición

- Un grupo f.g. Γ se dice recursivamente presentado si $\texttt{WP}(\Gamma)$ es recursivamente enumerable.

  "Existe un algoritmo al que dado $n \in \mathbb{N}$ produce una secuencia de aproximaciones de las bolas de radio n del grafo de Cayley de Γ que converge (no sabemos cuando)"

- Se dice que un grupo f.g. tiene problema de la palabra decidible si $\texttt{WP}(\Gamma)$ es decidible.

  "Existe un algoritmo al que dado $n \in \mathbb{N}$ produce la bolas de radio n del grafo de Cayley de Γ.

Ejemplo

Sea Γ un grupo finitamente presentado, i.e.

$$\Gamma = \langle S \mid R \rangle,$$

Donde S y $R \subseteq S^*$ son conjuntos finitos.

(Γ es isomorfo al grupo libre en S cuocientado por la clausura normal de R)

Entonces Γ es recursivamente presentado.

Ejemplo

Sea Γ un grupo finitamente presentado, i.e.

$$\Gamma = \langle S \mid R \rangle,$$

Donde S y $R \subseteq S^*$ son conjuntos finitos.

(Γ es isomorfo al grupo libre en S cuocientado por la clausura normal de R)

Entonces Γ es recursivamente presentado.

Teorema [Novikov 1955, Boone 1958]

Existen grupos finitamente presentados cuyo problema de la palabra no es decidible.

Vamos a estudiar ahora acciones de un grupo Γ en $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Vamos a estudiar ahora acciones de un grupo Γ en $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Para $w \in \{0,1\}^*$ denotemos

$$[w] = \{x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : x_0x_1 \ldots x_{|w|-1} = w\}.$$

Vamos a estudiar ahora acciones de un grupo Γ en $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Para $w \in \{0,1\}^*$ denotemos

$$[w] = \{x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : x_0 x_1 \dots x_{|w|-1} = w\}.$$

Definición: conjunto efectivamente cerrado

Decimos que un conjunto $X \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ es efectivamente cerrado si existe una máquina de Turing que acepta $w \in \{0,1\}^*$ si y solamente si $[w] \cap X = \varnothing$.

Informalmente, son conjuntos para los cuales existe una máquina de Turing que genera aproximaciones de su complemento.

Sea Γ f.g por $S \subseteq \Gamma$ y $\Gamma \curvearrowright X \subseteq \{0,1\}^{\Gamma}$ una acción.

Definición: acción efectiva

Decimos que $\Gamma \curvearrowright X$ es una acción efectiva si existe una máquina de Turing que acepta la tupla (s, v, w) donde $s \in S$ y $v, w \in \{0,1\}^*$ si y solamente si

$$[w] \cap s([v] \cap X) = \varnothing.$$

Informalmente, una acción es efectiva, si existe una máquina de Turing que genera una aproximación del complemento de $s([v] \cap X)$ para toda palabra v y todo generador s.

Ejemplo de acción efectiva

Odómetro $\mathbb{Z} \overset{T}{\curvearrowright} \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ "adición en base 2 con reserva"

Sea $k(x)$ el índice del primer 0 en x. Entonces

$$T(x)_n = \begin{cases} 1 \text{ if } n = k(x) \\ 0 \text{ if } n < k(x) \\ x_n \text{ if } n > k(x) \end{cases},$$

Si no existe $k(x)$ entonces $x = 1111\ldots$ y $T(x) = 0000\ldots$.

Ejemplo de acción efectiva

Odómetro $\mathbb{Z} \overset{T}{\curvearrowright} \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ "adición en base 2 con reserva"

Sea $k(x)$ el índice del primer 0 en x. Entonces

$$T(x)_n = \begin{cases} 1 \text{ if } n = k(x) \\ 0 \text{ if } n < k(x) \\ x_n \text{ if } n > k(x) \end{cases},$$

Si no existe $k(x)$ entonces $x = 1111\dots$ y $T(x) = 0000\dots$.

$$\begin{aligned}
x &= 010010100010001000\dots \\
T(x) &= 110010100010001000\dots \\
T^2(x) &= 001010100010001000\dots \\
T^3(x) &= 101010100010001000\dots \\
T^4(x) &= 011010100010001000\dots
\end{aligned}$$

Full Γ-shift

Sea $\Gamma \overset{\sigma}{\curvearrowright} \{0,1\}^{\Gamma}$ dado por

$$\sigma^h(x)_g = x_{h^{-1}g}.$$

Cuando Γ es recursivamente presentado, $\Gamma \overset{\sigma}{\curvearrowright} \{0,1\}^{\Gamma}$ es conjugado a una acción efectiva

Full Γ-shift

Sea $\Gamma \overset{\sigma}{\curvearrowright} \{0,1\}^{\Gamma}$ dado por

$$\sigma^{h}(x)_g = x_{h^{-1}g}.$$

Cuando Γ es recursivamente presentado, $\Gamma \overset{\sigma}{\curvearrowright} \{0,1\}^{\Gamma}$ es conjugado a una acción efectiva

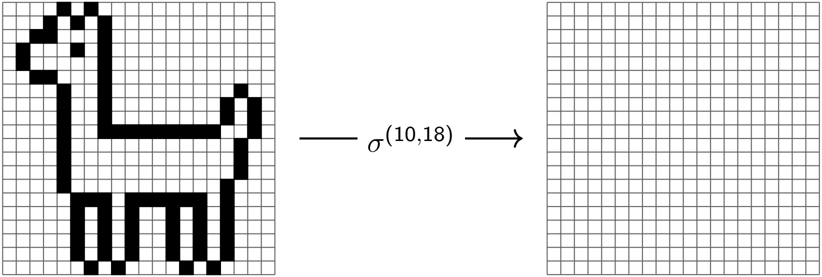


Figure: Una configuración $x \in \{\blacksquare, \square\}^{\mathbb{Z}^2/20\mathbb{Z}^2}$ y su imagen por $\sigma^{(10,18)}$.

Full Γ-shift

Sea $\Gamma \overset{\sigma}{\curvearrowright} \{0,1\}^{\Gamma}$ dado por

$$\sigma^{h}(x)_{g} = x_{h^{-1}g}.$$

Cuando Γ es recursivamente presentado, $\Gamma \overset{\sigma}{\curvearrowright} \{0,1\}^{\Gamma}$ es conjugado a una acción efectiva

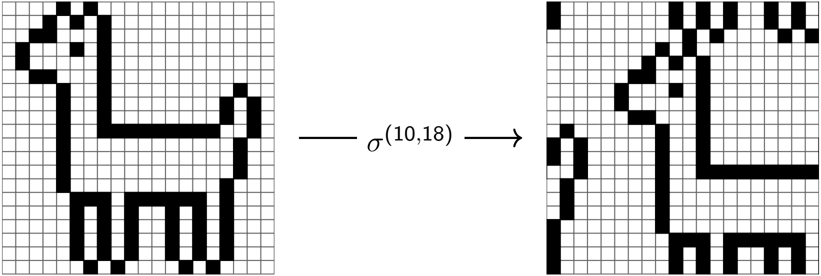


Figure: Una configuración $x \in \{\blacksquare, \square\}^{\mathbb{Z}^2/20\mathbb{Z}^2}$ y su imagen por $\sigma^{(10,18)}$.

Subshifts

Sea A un conjunto finito y $\Gamma \overset{\sigma}{\curvearrowright} A^{\Gamma}$ dado por $\sigma^h(x)_g = x_{h^{-1}g}$.

Subshift

Un subconjunto $X \subseteq A^{\Gamma}$ se denomina **subshift** si es cerrado para la topología prodiscreta e invariante bajo la acción de Γ.

Nota: Toda acción $\Gamma \curvearrowright X$ "expansiva" es conjugada a un subshift de A^{Γ}.

Subshifts

Sea A un conjunto finito y $\Gamma \overset{\sigma}{\curvearrowright} A^{\Gamma}$ dado por $\sigma^h(x)_g = x_{h^{-1}g}$.

Subshift

Un subconjunto $X \subseteq A^{\Gamma}$ se denomina **subshift** si es cerrado para la topología prodiscreta e invariante bajo la acción de Γ.
Nota: Toda acción $\Gamma \curvearrowright X$ "expansiva" es conjugada a un subshift de A^{Γ}.

Equivalentemente, si para un subconjunto finito $F \subseteq \Gamma$ y $p \colon F \to A$ definimos

$$[p] = \{x \in A^{\Gamma} : x|_F = p\}.$$

Entonces X es un subshift si existe una familia $\mathcal{F}$ de funciones p como arriba tal que

$$X = A^{\Gamma} \setminus \bigcup_{g \in \Gamma, p \in \mathcal{F}} g[p].$$

Subshifts

X es un subshift si existe una familia $\mathcal{F}$ de funciones p como arriba tal que

$$X = A^{\Gamma} \setminus \bigcup_{g \in \Gamma, p \in \mathcal{F}} g[p].$$

Subshift

Un subshift se dice de **tipo finito** si se puede describir de la manera anterior con una familia finita $\mathcal{F}$.

- Si Γ es un grupo recursivamente presentado, todo subshift de tipo finito es topológicamente conjugado a una acción efectiva.
- Todo factor de una acción efectiva es topológicamente conjugado a una acción efectiva.

Teorema, Jeandel ($\Leftarrow$) Aubrun, B. Thomassé ($\Rightarrow$)

Sea Γ un grupo finitamente generado y asumamos que $\mathtt{WP}(\Gamma)$ es recursivamente presentado.
Γ tiene problema de la palabra decidible si y solamente si Γ admite una acción libre y efectiva.

Nota: La acción libre y efectiva puede elegirse expansiva (un subshift).

Teorema, Jeandel ($\Leftarrow$) Aubrun, B. Thomassé ($\Rightarrow$)

Sea Γ un grupo finitamente generado y asumamos que $\mathtt{WP}(\Gamma)$ es recursivamente presentado.
Γ tiene problema de la palabra decidible si y solamente si Γ admite una acción libre y efectiva.

Nota: La acción libre y efectiva puede elegirse expansiva (un subshift).

(demostración en la pizarra)

Una noción esencial de la calculabilidad es la de **universalidad**. Es decir, que existe una máquina de Turing que puede "simular" a todas las otras.

Universalidad

Una noción esencial de la calculabilidad es la de **universalidad**. Es decir, que existe una máquina de Turing que puede "simular" a todas las otras.

Intuitivamente, un computador corre un algoritmo universal que acepta en entrada codificaciones de algoritmo y simula la ejecución de ese algoritmo.

Universalidad

Una noción esencial de la calculabilidad es la de **universalidad**. Es decir, que existe una máquina de Turing que puede “simular” a todas las otras.

Intuitivamente, un computador corre un algoritmo universal que acepta en entrada codificaciones de algoritmo y simula la ejecución de ese algoritmo.

Esta noción se extiende a los grupos y la dinámica en varias formas.

Teorema de Higman 1961

Existe un grupo finitamente presentado universal H tal que todo grupo f.g. recursivamente presentado es isomorfo a un subgrupo de H.

Los teoremas de universalidad tienen muchas aplicaciones.

Teorema de Higman 1961

Existe un grupo finitamente presentado universal H tal que todo grupo f.g. recursivamente presentado es isomorfo a un subgrupo de H.

Los teoremas de universalidad tienen muchas aplicaciones.

Teorema de Higman 1961

Existe un grupo finitamente presentado universal H tal que todo grupo f.g. recursivamente presentado es isomorfo a un subgrupo de H.

Corolario: [Novikov 1955, Boone 1958]

Existen grupos finitamente presentados cuyo problema de la palabra no es decidible.

Demostrar NB directamente es muy difícil, pero usando el teorema de Higman, basta mostrar que existe un grupo f.g recursivamente presentado con problema de la palabra indecidible.

Los teoremas de universalidad tienen muchas aplicaciones.

Teorema de Higman 1961

Existe un grupo finitamente presentado universal H tal que todo grupo f.g. recursivamente presentado es isomorfo a un subgrupo de H.

Corolario: [Novikov 1955, Boone 1958]

Existen grupos finitamente presentados cuyo problema de la palabra no es decidible.

Demostrar NB directamente es muy difícil, pero usando el teorema de Higman, basta mostrar que existe un grupo f.g recursivamente presentado con problema de la palabra indecidible.
Idea: Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función.

$$\Gamma_f = \langle a, b, c, d | a^{f(n)} b a^{-f(n)} = c^{f(n)} d c^{-f(n)}, n \in \mathbb{N} \rangle.$$

Ver https://berstein2015.wordpress.com/2015/02/03/higmans-marvelous-theorem/.

Universalidad en dinámica

Lamentablemente, los teoremas que se conocen de universalidad en dinámica son más complicados.

Teorema de Hochman, 2009

Toda acción efectiva $\mathbb{Z}^d \curvearrowright X$ es factor de una subacción de un subshift de tipo finito $\widehat{X}$ en $\mathbb{Z}^{d+2}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}^{d+2} \overset{\sigma}{\curvearrowright} \widehat{X} \arrow[d, "\text{subacción}"'] & \\
\mathbb{Z}^{d} \overset{\sigma}{\curvearrowright} \widehat{X} \arrow[r, two heads, "\text{factor}"'] & \mathbb{Z}^d \curvearrowright X
\end{tikzcd}$$

Y el factor es "bonito" (módulo un odómetro, es 1-1 en un conjunto de medida 1 con respecto a cualquier medida invariante.)

Universalidad en dinámica

Teorema de Hochman, 2009

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}^{d+2} \overset{\sigma}{\curvearrowright} \widehat{X} \arrow[d, "\text{subacción}"'] & \\
\mathbb{Z}^{d} \overset{\sigma}{\curvearrowright} \widehat{X} \arrow[r, two heads, "\text{factor}"'] & \mathbb{Z}^{d} \curvearrowright X
\end{tikzcd}
$$

Universalidad en dinámica

Teorema de Hochman, 2009

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}^{d+2} \overset{\sigma}{\curvearrowright} \widehat{X} \arrow[d, "\text{subacción}"'] & \\
\mathbb{Z}^{d} \overset{\sigma}{\curvearrowright} \widehat{X} \arrow[r, two heads, "\text{factor}"'] & \mathbb{Z}^{d} \curvearrowright X
\end{tikzcd}
$$

- No se puede reducir la dimensión (Hay acciones efectivas de $\mathbb{Z}^d$ que no se pueden obtener de esa forma a partir de SFTs en $\mathbb{Z}^{d+1}$).

Universalidad en dinámica

Teorema de Hochman, 2009

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}^{d+2} \overset{\sigma}{\curvearrowright} \widehat{X} \arrow[d, "\text{subacción}"'] & \\
\mathbb{Z}^{d} \overset{\sigma}{\curvearrowright} \widehat{X} \arrow[r, two heads, "\text{factor}"'] & \mathbb{Z}^{d} \curvearrowright X
\end{tikzcd}
$$

- No se puede reducir la dimensión (Hay acciones efectivas de $\mathbb{Z}^d$ que no se pueden obtener de esa forma a partir de SFTs en $\mathbb{Z}^{d+1}$).
- No se puede intercambiar el orden de la subacción y factor.

Universalidad en dinámica

Teorema de Hochman, 2009

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^{d+2} \overset{\sigma}{\curvearrowright} \widehat{X} \arrow[d, "\text{subacción}"'] & \\ \mathbb{Z}^{d} \overset{\sigma}{\curvearrowright} \widehat{X} \arrow[r, two heads, "\text{factor}"'] & \mathbb{Z}^d \curvearrowright X \end{tikzcd}$$

- No se puede reducir la dimensión (Hay acciones efectivas de $\mathbb{Z}^d$ que no se pueden obtener de esa forma a partir de SFTs en $\mathbb{Z}^{d+1}$).
- No se puede intercambiar el orden de la subacción y factor.
- Sin embargo, si $\mathbb{Z}^d \curvearrowright X$ es expansiva...

Teorema de Aubrun-Sablik 2013, Durand-Romaschenko-Shen 2010

Si $\mathbb{Z}^d \curvearrowright X$ es expansiva (i.e. conjugada a un subshift) entonces $\mathbb{Z}^d \curvearrowright X$ es conjugado a la subacción de un factor simbólico de un SFT en $\mathbb{Z}^{d+1}$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}^{d+1} \overset{\sigma}{\curvearrowright} \widehat{X} \arrow[r, two heads, "\text{factor simbólico}"'] & \mathbb{Z}^{d+1} \overset{\sigma}{\curvearrowright} \widehat{Y} \arrow[d, "\text{subacción}"'] \\
& \mathbb{Z}^d \curvearrowright X
\end{tikzcd}
$$

Teorema de Aubrun-Sablik 2013, Durand-Romaschenko-Shen 2010

Si $\mathbb{Z}^d \curvearrowright X$ es expansiva (i.e. conjugada a un subshift) entonces $\mathbb{Z}^d \curvearrowright X$ es conjugado a la subacción de un factor simbólico de un SFT en $\mathbb{Z}^{d+1}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}^{d+1} \overset{\sigma}{\curvearrowright} \widehat{X} \arrow[r, two heads, "\text{factor simbólico}"'] & \mathbb{Z}^{d+1} \overset{\sigma}{\curvearrowright} \widehat{Y} \arrow[d, "\text{subacción}"'] \\
& \mathbb{Z}^d \curvearrowright X
\end{tikzcd}$$

Consecuencias:

- Caracterización de entropía topológica de $\mathbb{Z}^d$-SFTs (Hochman-Meyerovitch).

Teorema de Aubrun-Sablik 2013, Durand-Romaschenko-Shen 2010

Si $\mathbb{Z}^d \curvearrowright X$ es expansiva (i.e. conjugada a un subshift) entonces $\mathbb{Z}^d \curvearrowright X$ es conjugado a la subacción de un factor simbólico de un SFT en $\mathbb{Z}^{d+1}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}^{d+1} \overset{\sigma}{\curvearrowright} \widehat{X} \arrow[r, two heads, "\text{factor simbólico}"'] & \mathbb{Z}^{d+1} \overset{\sigma}{\curvearrowright} \widehat{Y} \arrow[d, "\text{subacción}"'] \\
& \mathbb{Z}^d \curvearrowright X
\end{tikzcd}$$

Consecuencias:

- Caracterización de entropía topológica de $\mathbb{Z}^d$-SFTs (Hochman-Meyerovitch).
- Existencia de $\mathbb{Z}^d$-SFTs libres para $d \geq 2$. (Berger, Robinson)

Teorema de Aubrun-Sablik 2013, Durand-Romaschenko-Shen 2010

Si $\mathbb{Z}^d \curvearrowright X$ es expansiva (i.e. conjugada a un subshift) entonces $\mathbb{Z}^d \curvearrowright X$ es conjugado a la subacción de un factor simbólico de un SFT en $\mathbb{Z}^{d+1}$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}^{d+1} \overset{\sigma}{\curvearrowright} \widehat{X} \arrow[r, two heads, "\text{factor simbólico}"'] & \mathbb{Z}^{d+1} \overset{\sigma}{\curvearrowright} \widehat{Y} \arrow[d, "\text{subacción}"'] \\
 & \mathbb{Z}^d \curvearrowright X
\end{tikzcd}
$$

Consecuencias:

- Caracterización de entropía topológica de $\mathbb{Z}^d$-SFTs (Hochman-Meyerovitch).
- Existencia de $\mathbb{Z}^d$-SFTs libres para $d \geq 2$. (Berger, Robinson)
- Indecidibilidad de si un $\mathbb{Z}^d$-SFT X dado por $\mathcal{F}$ es vacío ($\mathcal{F}$ es la entrada y $d \geq 2$). (Berger)

Teorema de Aubrun-Sablik 2013, Durand-Romaschenko-Shen 2010

Si $\mathbb{Z}^d \curvearrowright X$ es expansiva (i.e. conjugada a un subshift) entonces $\mathbb{Z}^d \curvearrowright X$ es conjugado a la subacción de un factor simbólico de un SFT en $\mathbb{Z}^{d+1}$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^{d+1} \overset{\sigma}{\curvearrowright} \widehat{X} \arrow[r, two heads, "\text{factor simbólico}"'] & \mathbb{Z}^{d+1} \overset{\sigma}{\curvearrowright} \widehat{Y} \arrow[d, "\text{subacción}"'] \\ & \mathbb{Z}^d \curvearrowright X \end{tikzcd}$$

Consecuencias:

- Caracterización de entropía topológica de $\mathbb{Z}^d$-SFTs (Hochman-Meyerovitch).
- Existencia de $\mathbb{Z}^d$-SFTs libres para $d \geq 2$. (Berger, Robinson)
- Indecidibilidad de si un $\mathbb{Z}^d$-SFT X dado por $\mathcal{F}$ es vacío ($\mathcal{F}$ es la entrada y $d \geq 2$). (Berger)

Universalidad para grupos generales

Tratemos de dar una noción de universidad para grupos finitamente generados.

Simulación dinámica

Decimos que un grupo Γ simula en dinámica a un grupo H si existe una secuencia corta exacta

$$1 \to N \to \Gamma \to H \to 1,$$

tal que para toda acción efectiva $H \curvearrowright X$ la extensión de esa acción a Γ tal que N actúa trivialmente es un factor de un SFT en Γ.

Universalidad para grupos generales

Tratemos de dar una noción de universidad para grupos finitamente generados.

Simulación dinámica

Decimos que un grupo Γ simula en dinámica a un grupo H si existe una secuencia corta exacta

$$1 \to N \to \Gamma \to H \to 1,$$

tal que para toda acción efectiva $H \curvearrowright X$ la extensión de esa acción a Γ tal que N actúa trivialmente es un factor de un SFT en Γ.

De este modo, el teorema de Hochman puede reinterpretarse como

$$\mathbb{Z}^{d+2} \text{ simula en dinámica a } \mathbb{Z}^{d} \text{ para todo } d \geq 1.$$

Universalidad para grupos generales

Usando la noción anterior, se pueden establecer los siguientes teoremas de simulación dinámica.

Teorema, B. Sablik

Sea Γ un grupo finitamente generado. Entonces

$$\mathbb{Z}^d \rtimes_\varphi \Gamma \text{ simula en dinámica a } \Gamma,$$

para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z}^d)$, $d \geq 2$.

Universalidad para grupos generales

Usando la noción anterior, se pueden establecer los siguientes teoremas de simulación dinámica.

Teorema, B. Sablik

Sea Γ un grupo finitamente generado. Entonces

$$\mathbb{Z}^d \rtimes_\varphi \Gamma \text{ simula en dinámica a } \Gamma,$$

para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z}^d)$, $d \geq 2$.

Aplicación: El grupo de Heisenberg discreto admite un SFT libre.

Universalidad para grupos generales

Usando la noción anterior, se pueden establecer los siguientes teoremas de simulación dinámica.

Teorema, B. Sablik

Sea Γ un grupo finitamente generado. Entonces

$$\mathbb{Z}^d \rtimes_\varphi \Gamma \text{ simula en dinámica a } \Gamma,$$

para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z}^d)$, $d \geq 2$.

Aplicación: El grupo de Heisenberg discreto admite un SFT libre.

Teorema, B.

Sea $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ tres grupos infinitos y finitamente generados. Entonces

$$\Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \Gamma_3 \text{ simula en dinámica a } \Gamma_1 \text{ para todo } d \geq 2.$$

Universalidad para grupos generales

Usando la noción anterior, se pueden establecer los siguientes teoremas de simulación dinámica.

Teorema, B. Sablik

Sea Γ un grupo finitamente generado. Entonces

$$\mathbb{Z}^d \rtimes_{\varphi} \Gamma \text{ simula en dinámica a } \Gamma,$$

para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z}^d)$, $d \geq 2$.

Aplicación: El grupo de Heisenberg discreto admite un SFT libre.

Teorema, B.

Sea $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ tres grupos infinitos y finitamente generados. Entonces

$$\Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \Gamma_3 \text{ simula en dinámica a } \Gamma_1 \text{ para todo } d \geq 2.$$

Aplicación: El grupo de Grigorchuk admite un SFT libre.

Universalidad para grupos generales

Consideremos la definición de simulación dinámica:

$$1 \to N \to \Gamma \to H \to 1,$$

Si tomamos $N = 1$, entonces $\Gamma \cong H$.

Grupo autosimulable

Decimos que un grupo Γ es autosimulable si toda acción efectiva $\Gamma \curvearrowright X$ es un factor de un SFT en Γ.

Universalidad para grupos generales

Consideremos la definición de simulación dinámica:

$$1 \to N \to \Gamma \to H \to 1,$$

Si tomamos $N = 1$, entonces $\Gamma \cong H$.

Grupo autosimulable

Decimos que un grupo Γ es autosimulable si toda acción efectiva $\Gamma \curvearrowright X$ es un factor de un SFT en Γ.

¿Existe algún grupo autosimulable?

Universalidad para grupos generales

Consideremos la definición de simulación dinámica:

$$1 \to N \to \Gamma \to H \to 1,$$

Si tomamos $N = 1$, entonces $\Gamma \cong H$.

Grupo autosimulable

Decimos que un grupo Γ es autosimulable si toda acción efectiva $\Gamma \curvearrowright X$ es un factor de un SFT en Γ.

¿Existe algún grupo autosimulable?

Trabajo en curso (Con M. Sablik y V. Salo)

- Ningún grupo RP promediable es autosimulable.

Universalidad para grupos generales

Consideremos la definición de simulación dinámica:

$$1 \to N \to \Gamma \to H \to 1,$$

Si tomamos $N = 1$, entonces $\Gamma \cong H$.

Grupo autosimulable

Decimos que un grupo Γ es autosimulable si toda acción efectiva $\Gamma \curvearrowright X$ es un factor de un SFT en Γ.

¿Existe algún grupo autosimulable?

Trabajo en curso (Con M. Sablik y V. Salo)

- Ningún grupo RP promediable es autosimulable.
- Existe una cantidad no numerable de grupos autosimulables no isomorfos entre sí.

Universalidad para grupos generales

Consideremos la definición de simulación dinámica:

$$1 \to N \to \Gamma \to H \to 1,$$

Si tomamos $N = 1$, entonces $\Gamma \cong H$.

Grupo autosimulable

Decimos que un grupo Γ es autosimulable si toda acción efectiva $\Gamma \curvearrowright X$ es un factor de un SFT en Γ.

¿Existe algún grupo autosimulable?

Trabajo en curso (Con M. Sablik y V. Salo)

- Ningún grupo RP promediable es autosimulable.
- Existe una cantidad no numerable de grupos autosimulables no isomorfos entre sí.
- La clase de grupos finitamente presentados autosimulables es estable bajo quasiisometrías.

Gracias por su atención