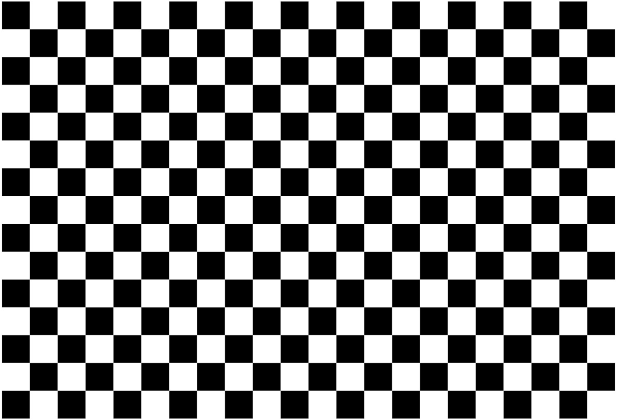
Une courte preuve de l'existence des subshifts fortement apériodiques sur les groupes dénombrables.

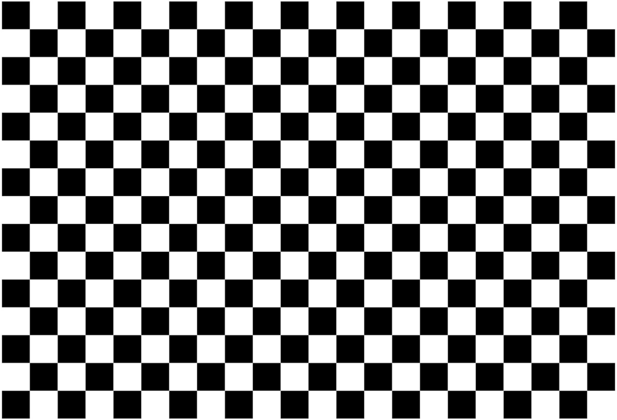
Sebastián Barbieri
LIP, ENS de Lyon

INTERACTIONS
Mai, 2016

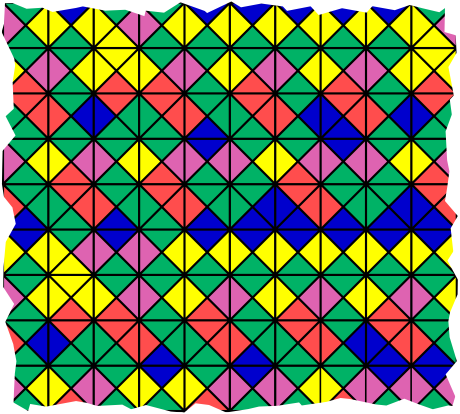
Ceci est un pavage périodique :



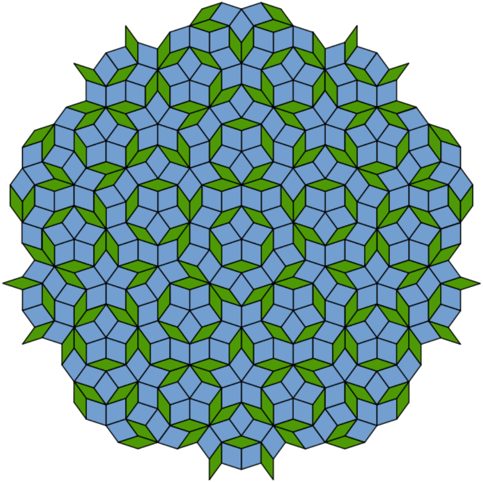
Ceci est un pavage périodique :



Il est ENNUYANT.



En revanche, ceci est intéressant !



Ceci est très joli !

Les choses formidables sont aussi utiles dans la vraie vie...

Les choses formidables sont aussi utiles dans la vraie vie...

Un exemple d'usage des pavages apériodiques.

Objectif de cet exposé

On va montrer comment construire des ensembles dynamiquement intéressants des coloriages apériodiques d'un groupe dénombrable.

Objectif de cet exposé

On va montrer comment construire des ensembles dynamiquement intéressants des coloriages apériodiques d'un groupe dénombrable.

Pour cuisiner on va utiliser :

- 100 ml de dynamique symbolique.

Objectif de cet exposé

On va montrer comment construire des ensembles dynamiquement intéressants des coloriages apériodiques d'un groupe dénombrable.

Pour cuisiner on va utiliser :

- 100 ml de dynamique symbolique.
- 1 portion de Lemme local de Lovász.

Objectif de cet exposé

On va montrer comment construire des ensembles dynamiquement intéressants des coloriages apériodiques d'un groupe dénombrable.

Pour cuisiner on va utiliser :

- 100 ml de dynamique symbolique.
- 1 portion de Lemme local de Lovász.

Et une version plus sympa avec :

Objectif de cet exposé

On va montrer comment construire des ensembles dynamiquement intéressants des coloriages apériodiques d'un groupe dénombrable.

Pour cuisiner on va utiliser :

- 100 ml de dynamique symbolique.
- 1 portion de Lemme local de Lovász.

Et une version plus sympa avec :

- 50 ml de combinatoire des mots.

Objectif de cet exposé

On va montrer comment construire des ensembles dynamiquement intéressants des coloriages apériodiques d'un groupe dénombrable.

Pour cuisiner on va utiliser :

- 100 ml de dynamique symbolique.
- 1 portion de Lemme local de Lovász.

Et une version plus sympa avec :

- 50 ml de combinatoire des mots.
- 400 g de théorie des graphes.

Objectif de cet exposé

On va montrer comment construire des ensembles dynamiquement intéressants des coloriages apériodiques d'un groupe dénombrable.

Pour cuisiner on va utiliser :

- 100 ml de dynamique symbolique.
- 1 portion de Lemme local de Lovász.

Et une version plus sympa avec :

- 50 ml de combinatoire des mots.
- 400 g de théorie des graphes.
- 200 g de probabilités.

Objectif de cet exposé

On va montrer comment construire des ensembles dynamiquement intéressants des coloriages apériodiques d'un groupe dénombrable.

Pour cuisiner on va utiliser :

- 100 ml de dynamique symbolique.
- 1 portion de Lemme local de Lovász.

Et une version plus sympa avec :

- 50 ml de combinatoire des mots.
- 400 g de théorie des graphes.
- 200 g de probabilités.
- Calculabilité à volonté.

Formalisme : Subshifts

- G est un groupe dénombrable.
- $\mathcal{A}$ est un alphabet fini. Ex : $\mathcal{A} = \{0, 1\}$.
- $\mathcal{A}^G$ est l'ensemble des configurations, $x : G \to \mathcal{A}$
- $\sigma : G \times \mathcal{A}^G \to \mathcal{A}^G$ est l'action à gauche donné par :

$$\sigma(h, x)_g := \sigma_h(x)_g = x_{h^{-1}g}.$$

Formalisme : Subshifts

- G est un groupe dénombrable.
- $\mathcal{A}$ est un alphabet fini. Ex : $\mathcal{A} = \{0, 1\}$.
- $\mathcal{A}^G$ est l'ensemble des configurations, $x : G \to \mathcal{A}$
- $\sigma : G \times \mathcal{A}^G \to \mathcal{A}^G$ est l'action à gauche donné par :

$$\sigma(h, x)_g := \sigma_h(x)_g = x_{h^{-1}g}.$$

Definition : subshift

$X \subset \mathcal{A}^G$ est un *subshift* si et seulement si il est invariant par l'action σ et fermé dans la topologie produit en $\mathcal{A}^G$.

Formalisme : Subshifts

- G est un groupe dénombrable.
- $\mathcal{A}$ est un alphabet fini. Ex : $\mathcal{A} = \{0, 1\}$.
- $\mathcal{A}^G$ est l'ensemble des configurations, $x : G \to \mathcal{A}$
- $\sigma : G \times \mathcal{A}^G \to \mathcal{A}^G$ est l'action à gauche donné par :

$$\sigma(h, x)_g := \sigma_h(x)_g = x_{h^{-1}g}.$$

Definition : subshift

$X \subset \mathcal{A}^G$ est un *subshift* si et seulement si il est invariant par l'action σ et fermé dans la topologie produit en $\mathcal{A}^G$.
Autrement dit : Il existe un ensemble de motifs interdits $\mathcal{F}$ tel que :

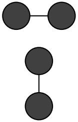
$$X = \mathcal{A}^G \setminus \bigcup_{g \in G, p \in \mathcal{F}} \sigma_g([p])$$

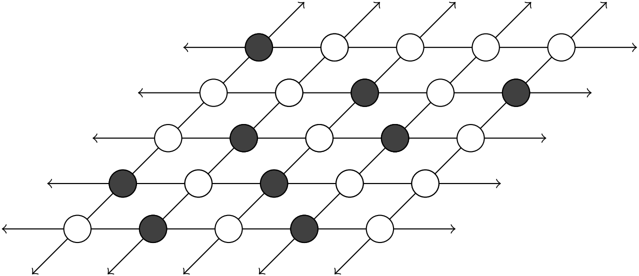
Example in $\mathbb{Z}^2$: Fibonacci shift

Example : Fibonacci shift. X_{Fib} est l'ensemble des coloriages $x : \mathbb{Z}^2 \to \{\circ, \bullet\}$ tel qu'on ne voit jamais deux $\bullet$ à côté.

Example in $\mathbb{Z}^2$: Fibonacci shift

Example : Fibonacci shift. X_{Fib} est l'ensemble des coloriages $x : \mathbb{Z}^2 \to \{\circ, \bullet\}$ tel qu'on ne voit jamais deux $\bullet$ à côté.

$\mathcal{F} =$ 



Périodicité

Definition : Point périodique

$x \in X$ est *périodique* s'il existe $g \in G \setminus \{1_G\}$ tel que :

$$\sigma_g(x) = x$$

Périodicité

Definition : Point périodique

$x \in X$ est *périodique* s'il existe $g \in G \setminus \{1_G\}$ tel que :

$$\sigma_g(x) = x$$

Definition : subshift fortement apériodique

$X \subset \mathcal{A}^G$ est *fortement apériodique* si aucun $x \in X$ est périodique.

Périodicité

Definition : Point périodique

$x \in X$ est *périodique* s'il existe $g \in G \setminus \{1_G\}$ tel que :

$$\sigma_g(x) = x$$

Definition : subshift fortement apériodique

$X \subset \mathcal{A}^G$ est *fortement apériodique* si aucun $x \in X$ est périodique. Autrement dit, l'action $\sigma : G \times \mathcal{A}^G \to \mathcal{A}^G$ est libre.

$$\forall x \in X, \mathrm{stab}_\sigma(x) = \{g \in G \mid \sigma_g(x) = x\} = \{1_G\}$$

Périodicité

Definition : Point périodique

$x \in X$ est *périodique* s'il existe $g \in G \setminus \{1_G\}$ tel que :

$$\sigma_g(x) = x$$

Definition : subshift fortement apériodique

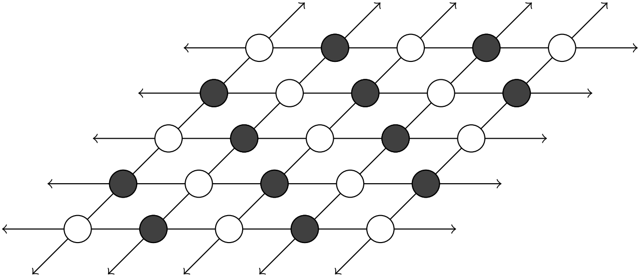
$X \subset \mathcal{A}^G$ est *fortement apériodique* si aucun $x \in X$ est périodique. Autrement dit, l'action $\sigma : G \times \mathcal{A}^G \to \mathcal{A}^G$ est libre.

$$\forall x \in X, \mathrm{stab}_\sigma(x) = \{g \in G \mid \sigma_g(x) = x\} = \{1_G\}$$

Clairement, on s'intéresse aux subshifts apériodiques qui ne sont pas vides.

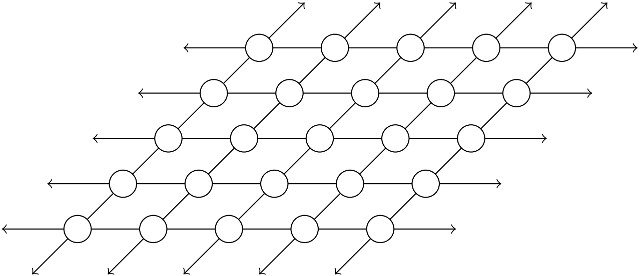
Example periodicité

Le subshift de Fibonacci n'est pas apériodique. Il contient des configurations périodiques :

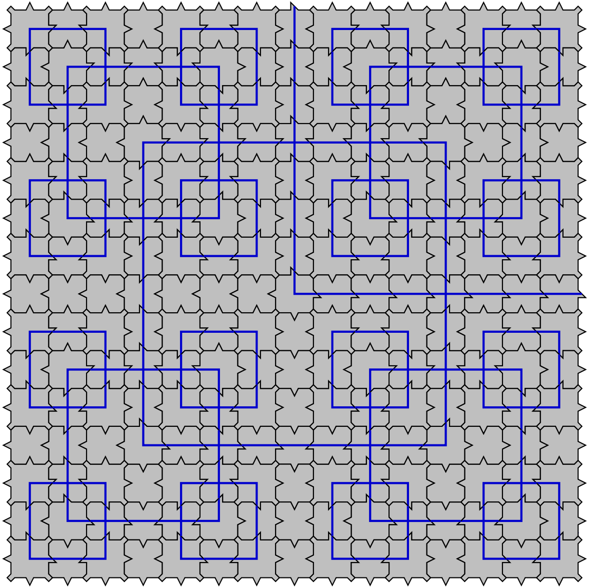


Example periodicité

Le subshift de Fibonacci n'est pas apériodique. Il contient des configurations périodiques :



Construction classique en $\mathbb{Z}^2$: Pavage de Robinson



Notre problématique

L'existence d'un subshift fortement apériodique n'est pas évident dans un groupe général.

Question par Glasner and Uspenskij 2009

Y a t-il un groupe dénombrable qui n'admet pas des subshift non vide et fortement apériodique sur un alphabet de deux symboles ?

Notre problématique

L'existence d'un subshift fortement apériodique n'est pas évident dans un groupe général.

Question par Glasner and Uspenskij 2009

Y a t-il un groupe dénombrable qui n'admet pas des subshift non vide et fortement apériodique sur un alphabet de deux symboles ?

Theorem by Gao, Jackson and Seward 2009

Non.

Et la preuve est un peu trop technique...

Une preuve courte

Pourtant...

On peut montrer le même résultat avec les ingrédients qu'on a annoncés.

Pourtant...

On peut montrer le même résultat avec les ingrédients qu'on a annoncés.

Théorème par Aubrun, B, Thomassé

Non.

100 ml de dynamique symbolique.

$x \in \{0,1\}^G$ a la *propriété des voisinages disctincts* si pour chaque $h \in G \setminus \{1_G\}$ il existe $T \subset G$ fini tel que :

$$\forall g \in G : x|_{ghT} \neq x|_{gT}.$$

100 ml de dynamique symbolique.

$x \in \{0,1\}^G$ a la *propriété des voisinages disctincts* si pour chaque $h \in G \setminus \{1_G\}$ il existe $T \subset G$ fini tel que :

$$\forall g \in G : x|_{ghT} \neq x|_{gT}.$$

Proposition

Si x a la propriété des voisinages disctincts alors $\overline{orb_\sigma(x)}$ est fortement apérodique.

1 portion de lemme local de Lovász

Lovász Local Lemma (Asymmetrical version)

Soit $\mathscr{A} := \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ une collection finie d'ensembles mesurables dans un espace de probabilité $(X, \mu, \mathcal{B})$. Pour $A \in \mathscr{A}$, $\Gamma(A)$ est le plus petit sous-ensemble de $\mathscr{A}$ tel que A est indépendant de $\mathscr{A} \setminus (\{A\} \cup \Gamma(A))$. S'il existe une fonction $x : \mathscr{A} \to (0, 1)$ telle que :

$$\forall A \in \mathscr{A} : \mu(A) \leq x(A) \prod_{B \in \Gamma(A)} (1 - x(B))$$

La probabilité d'éviter tous les événements en $\mathscr{A}$ est positive, en particulier :

$$\mu\left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \prod_{A \in \mathscr{A}} (1 - x(A)) > 0.$$

Lovász Local Lemma pour les subshifts

Condition suffisante pour être non-vide

Soit G un groupe dénombrable et $X \subset \mathcal{A}^G$ un subshift défini par un ensemble de motifs interdits $\mathcal{F} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{F}_n$, où $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{A}^{S_n}$.
Suppossons qu'il existe $x : \mathbb{N} \times G \to (0,1)$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, g \in G,\ \mu(A_{n,g}) \leq x(n,g) \prod_{\substack{gS_n \cap hS_k \neq \emptyset \\ (k,h) \neq (n,g)}} (1 - x(k,h)),$$

Où $A_{n,g} = \left\{ x \in \mathcal{A}^G : x|_{gS_n} \in \mathcal{F}_n \right\}$ et μ est une mesure Bernoulli sur $\mathcal{A}^G$. Alors le subshift X est non-vide.

La preuve

Il suffit de montrer qu'il existe $x \in \{0,1\}^G$ avec la propriété des voisinages distincts.

La preuve

Il suffit de montrer qu'il existe $x \in \{0,1\}^G$ avec la propriété des voisinages distincts.

Ingrédients

- $C \in \mathbb{N}$.
- Une énumération $s_1, s_2, \ldots$ of G.
- $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite des ensembles finis G tel que pour chaque $i \in \mathbb{N}$, $T_i \cap s_i T_i = \emptyset$ et $|T_i| = C \cdot i$.
- La mesure Bernoulli uniforme μ
- $\mathscr{A} := \{A_{n,g}\}_{n\geq 1, g\in G}$
- $A_{n,g} = \{x \in \{0,1\}^G \mid x|_{gT_n} = x|_{gs_nT_n}\}$
- $x(A_{n,g}) := 2^{-\frac{Cn}{2}}$

La preuve

$$2^{-\frac{Cn}{2}} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - 2^{-\frac{Cm}{2}})^{4C^2 nm} \geq 2^{-\frac{Cn}{2}} \prod_{m=1}^{\infty} 2^{-8C^2 nm 2^{-\frac{Cm}{2}}}$$

$$= 2^{-\frac{Cn}{2}} 2^{-8C^2 \sum_{m=1}^{\infty} nm 2^{-\frac{Cm}{2}}}$$

Alors :

$$2^{-\frac{Cn}{2}} \leq 2^{-8C^2 \sum_{m=1}^{\infty} nm 2^{-\frac{Cm}{2}}}$$

$$\Longleftrightarrow \quad 1 \geq 16C \sum_{m=1}^{\infty} m 2^{-\frac{Cm}{2}}$$

$$\Longleftrightarrow \quad 1 \geq 16C \frac{2^{\frac{C}{2}}}{(2^{\frac{C}{2}} - 1)^2}$$

La preuve

$$2^{-\frac{Cn}{2}} \prod_{m=1}^{\infty} (1-2^{-\frac{Cm}{2}})^{4C^2nm} \geq 2^{-\frac{Cn}{2}} \prod_{m=1}^{\infty} 2^{-8C^2nm2^{-\frac{Cm}{2}}}$$

$$= 2^{-\frac{Cn}{2}} 2^{-8C^2\sum_{m=1}^{\infty} nm2^{-\frac{Cm}{2}}}$$

Alors :

CENSURÉ

$$2^{-\frac{C}{2}} \leq 2^{-8C^2\sum_{m=1}^{\infty} m2^{-\frac{Cm}{2}}}$$

$$\iff 1 \geq 16C \sum_{m=1}^{\infty} m2^{-\frac{Cm}{2}}$$

$$\iff 1 \geq 16C \frac{2^{\frac{C}{2}}}{(2^{\frac{C}{2}}-1)^2}$$

Problème du voleur

50 ml de combinatoire des mots.

Un mot $w \in \mathcal{A}^*$ est dit carré si $w = uu$ pour $u \in \mathcal{A}^*$.

50 ml de combinatoire des mots.

Un mot $w \in \mathcal{A}^*$ est dit carré si $w = uu$ pour $u \in \mathcal{A}^*$. Un mot infini $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ est dit sans carré si aucun de ses facteurs n'est un carré.

50 ml de combinatoire des mots.

Un mot $w \in \mathcal{A}^*$ est dit carré si $w = uu$ pour $u \in \mathcal{A}^*$. Un mot infini $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ est dit sans carré si aucun de ses facteurs n'est un carré.
exemple : Le mot infini généré par le morphisme :

$$0 \to 01210$$
$$1 \to 12021$$
$$2 \to 20102$$

$$0 \to 01210 \to 0121012021201021202101210\ldots$$

400 g de théorie des graphes

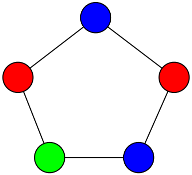
Coloration de sommets sans carré

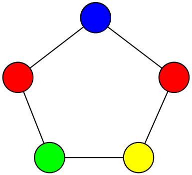
Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un coloriage de ses sommets est une fonction $x : V \to \mathcal{A}$. On dit qu'il est libre de carrés si la suite de couleurs de tout chemin est sans carrés.

400 g de théorie des graphes

Coloration de sommets sans carré

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un coloriage de ses sommets est une fonction $x : V \to \mathcal{A}$. On dit qu'il est libre de carrés si la suite de couleurs de tout chemin est sans carrés.





C_5 a un coloriage sans carrés avec 4 couleurs mais pas avec 3.

Encore LLL

On veux colorier des graphes infinis. On ne peut pas toujours faire cela avec un nombre fini de couleurs : $K_{\mathbb{N}}$.

Encore LLL

On veux colorier des graphes infinis. On ne peut pas toujours faire cela avec un nombre fini de couleurs : $K_{\mathbb{N}}$.

Théorème : Alon, Grytczuk, Haluszczak and Riordan

Tout graphe fini avec degré maximal Δ peut être colorié sans carrés avec $2e^{16}\Delta^2$ couleurs.

Encore LLL

On veux colorier des graphes infinis. On ne peut pas toujours faire cela avec un nombre fini de couleurs : $K_{\mathbb{N}}$.

Théorème : Alon, Grytczuk, Haluszczak and Riordan

Tout graphe fini avec degré maximal Δ peut être colorié sans carrés avec $2e^{16}\Delta^2$ couleurs.

▷ La preuve utilise le Lemme local de Lovasz.
Soit $\Gamma(G,S)$ le graphe de Cayley de G.

Théorème

G admet une coloration de $\Gamma(G,S)$ sans carrés avec $2^{19}|S|^2$ couleurs.

Finale

Soit $|\mathcal{A}| \geq 2^{19}|S|^2$ et $X \subset \mathcal{A}^G$ l'ensemble de configurations tel que chaque carré en $\Gamma(G, S)$ est interdit.

Finale

Soit $|\mathcal{A}| \geq 2^{19}|S|^2$ et $X \subset \mathcal{A}^G$ l'ensemble de configurations tel que chaque carré en $\Gamma(G, S)$ est interdit.

- X est un subshift.

Finale

Soit $|\mathcal{A}| \geq 2^{19}|S|^2$ et $X \subset \mathcal{A}^G$ l'ensemble de configurations tel que chaque carré en $\Gamma(G, S)$ est interdit.

- X est un subshift.
- Par le résultat antérieur $X \neq \emptyset$.

Finale

Soit $|\mathcal{A}| \geq 2^{19}|S|^2$ et $X \subset \mathcal{A}^G$ l'ensemble de configurations tel que chaque carré en $\Gamma(G, S)$ est interdit.

- X est un subshift.
- Par le résultat antérieur $X \neq \emptyset$.
- On peut montrer que si $x \in X$ est périodique, alors x contient un chemin avec de carrés.

Calculabilité à volonté

Théorème

Tout groupe G de type fini admet un subshift fortement apériodique non vide.
En plus, on peut énumérer ses motifs interdits avec une machine de Turing qui a pour oracle le problème du mot de G.

Merci beaucoup de votre attention !