Dinámica Simbólica sobre los grupos
Teselados aperiódicos en grupos

Sebastián Barbieri Lemp

University of British Columbia

Escuela de invierno en grupos y dinámica en México
Enero, 2018

Recuerdo

Conjetura de sobre el problema de dominó

Un grupo f.g. tiene problema de dominó decidible si y solamente si es virtualmente libre.

- ▷ Cierta en grupos libres, policíclicos, $BS(m,n)$, etc,. . . .

Recuerdo

Conjetura de sobre el problema de dominó

Un grupo f.g. tiene problema de dominó decidible si y solamente si es virtualmente libre.

- ▷ Cierta en grupos libres, policíclicos, $BS(m, n)$, etc,. . . .

SFT fuertemente aperiódico

un subshift $X \subset \mathcal{A}^G$ se dice fuertemente aperiódico si para todo x,

$$\sigma^g(x) = x \implies g = 1_G.$$

Recuerdo

Conjetura de sobre el problema de dominó

Un grupo f.g. tiene problema de dominó decidible si y solamente si es virtualmente libre.

▷ Cierta en grupos libres, policíclicos, $BS(m,n)$, etc,. . . .

SFT fuertemente aperiódico

un subshift $X \subset \mathcal{A}^G$ se dice fuertemente aperiódico si para todo x,

$$\sigma^g(x) = x \implies g = 1_G.$$

Resultados plática II

- en $\mathbb{Z}$ no hay.
- en $\mathbb{Z}^2$ sí.

Recuerdo

Conjetura de sobre el problema de dominó

Un grupo f.g. tiene problema de dominó decidible si y solamente si es virtualmente libre.

▷ Cierta en grupos libres, policíclicos, $BS(m,n)$, etc,. . . .

SFT fuertemente aperiódico

un subshift $X \subset \mathcal{A}^G$ se dice fuertemente aperiódico si para todo x,

$$\sigma^g(x) = x \implies g = 1_G.$$

Resultados plática II

- en $\mathbb{Z}$ no hay.
- en $\mathbb{Z}^2$ sí.

¿Qué se puede decir en el caso de grupos más generales?

Relación entre DP y SFT f.a.

$$\mathtt{DP}(G) \text{ indecidible } \sim \exists \text{ SFT } \text{ f. aperiódico}$$

$\triangleright$ Históricamente relacionados por la conjetura de Wang (que el problema de dominó era decidible en $\mathbb{Z}^2$.)

Relación entre DP y SFT f.a.

$$\texttt{DP}(G) \text{ indecidible } \sim \exists \text{ SFT f. aperiódico}$$

$\triangleright$ Históricamente relacionados por la conjetura de Wang (que el problema de dominó era decidible en $\mathbb{Z}^2$.)

Pregunta preguntosa

¿Es verdad que un grupo G admite SFTs f. aperiódicos si y solamente si $\texttt{DP}(G)$ es indecidible?

Relación entre DP y SFT f.a.

$$\mathtt{DP}(G) \text{ indecidible } \sim \exists \text{ SFT } \text{ f. aperiódico}$$

$\triangleright$ Históricamente relacionados por la conjetura de Wang (que el problema de dominó era decidible en $\mathbb{Z}^2$.)

Pregunta preguntosa

¿Es verdad que un grupo G admite SFTs f. aperiódicos si y solamente si $\mathtt{DP}(G)$ es indecidible?

Un ejemplo sorprendente

Teorema: [Jeandel, 15]

Sea G un grupo recursivamente presentado. Si G admite un SFT X fuertemente aperiódico entonces $\mathtt{WP}(G)$ es decidible.

Un ejemplo sorprendente

Teorema: [Jeandel, 15]

Sea G un grupo recursivamente presentado. Si G admite un SFT X fuertemente aperiódico entonces $\mathtt{WP}(G)$ es decidible.

[Demostración en la pizarra]

Un ejemplo sorprendente

Teorema: [Jeandel, 15]

Sea G un grupo recursivamente presentado. Si G admite un SFT X fuertemente aperiódico entonces $\mathtt{WP}(G)$ es decidible.

[Demostración en la pizarra]

$\triangleright$ Recordemos que $\mathtt{WP}(G) \leq_m \overline{\mathtt{DP}(G)}$. Luego en grupos recursivamente presentados con problema de la palabra indecidible:

- No hay SFTs f. aperiódicos.
- El problema de dominó nunca es decidible.

De hecho, esto es sólo la punta del iceberg...

Subshifts efectivos

$$\text{SFTs} \longrightarrow \text{sóficos} \longrightarrow$$

Definición: subshift efectivo

Un subshift se dice *efectivo*, si puede ser definido por un conjunto de codificaciones de patrones prohibidos que es recursivamente enumerable.

Subshifts efectivos

$$\text{SFTs} \longrightarrow \text{sóficos} \longrightarrow$$

Definición: subshift efectivo

Un subshift se dice *efectivo*, si puede ser definido por un conjunto de codificaciones de patrones prohibidos que es recursivamente enumerable.

Ejemplos

- $X \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ tal que 10^p1 está prohibido para todo primo p.
- $X_\beta \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ el Sturmiano de pendiente β si β es calculable (por ej. algebraico).

Subshifts efectivos

SFTs $\longrightarrow$ sóficos $\longrightarrow$ efectivos $\longrightarrow$

Definición: subshift efectivo

Un subshift se dice *efectivo*, si puede ser definido por un conjunto de codificaciones de patrones prohibidos que es recursivamente enumerable.

Ejemplos

- $X \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ tal que 10^p1 está prohibido para todo primo p.
- $X_\beta \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ el Sturmiano de pendiente β si β es calculable (por ej. algebraico).

Subshifts efectivos

El teorema de Jeandel sigue siendo válido si reemplazamos SFT f. aperiódico por subshift efectivo f. aperiódico. De hecho, es una caracterización.

Teorema: [Aubrun, B, Thomassé, 15]

Si G es un grupo f.g. recursivamente presentado entonces G tiene problema de la palabra decidible si y solamente si existe un G-subshift efectivo fuertemente aperiódico.

[Si sobra tiempo lo demuestro al final de la plática]

Otro resultado negativo

Otro aspecto que influye en la existencia de SFTs f. aperiódicos es la geometría del grupo.

Otro resultado negativo

Otro aspecto que influye en la existencia de SFTs f. aperiódicos es la geometría del grupo.

Sea $S \Subset G$ un generador y $\Gamma(G,S)$ su grafo de Cayley asociado.

$$\Gamma(G,S) = (G, \{(g,gs), s \in S\})$$

El grafo de Cayley induce una distancia d_S por medio de los caminos más cortos.

Definición: puntas de un grupo

El número de puntas $e(G)$ de un grupo G es el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \text{nro de componentes infinitas de } \Gamma(G,S) \setminus B_S(1_G, n).$$

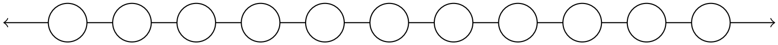
Ejemplos

Todo grupo finito tiene cero puntas.

Figura: En esta imagen se puede apreciar una vista de las puntas del grupo monstruo M de orden 808017424794512875886459904961710757005754368000000000.

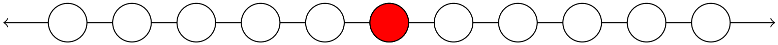
Ejemplos

$\mathbb{Z}$ tiene dos puntas.



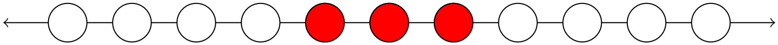
Ejemplos

$\mathbb{Z}$ tiene dos puntas.



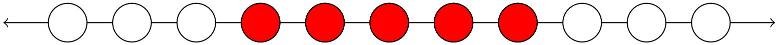
Ejemplos

$\mathbb{Z}$ tiene dos puntas.



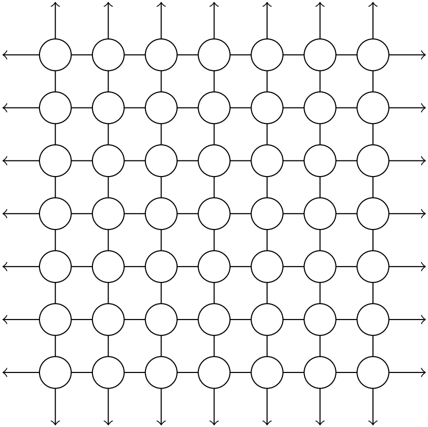
Ejemplos

$\mathbb{Z}$ tiene dos puntas.



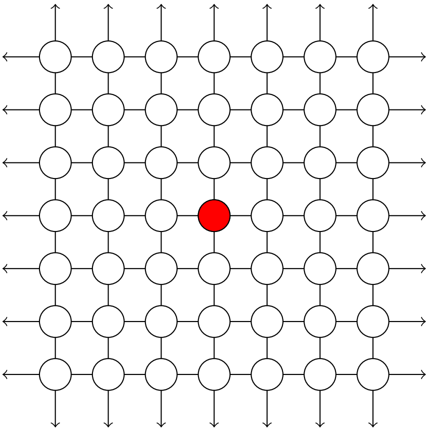
Ejemplos

$\mathbb{Z}^2$ tiene una punta.



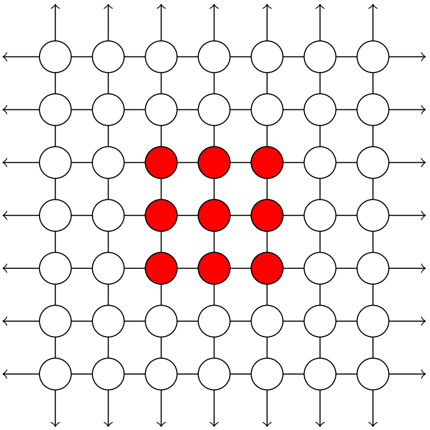
Ejemplos

$\mathbb{Z}^2$ tiene una punta.



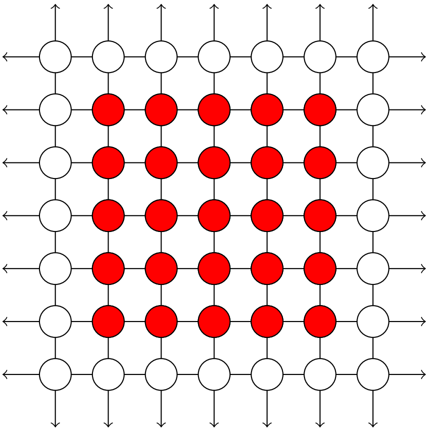
Ejemplos

$\mathbb{Z}^2$ tiene una punta.



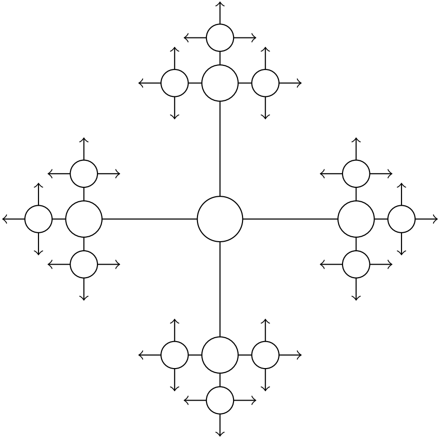
Ejemplos

$\mathbb{Z}^2$ tiene una punta.



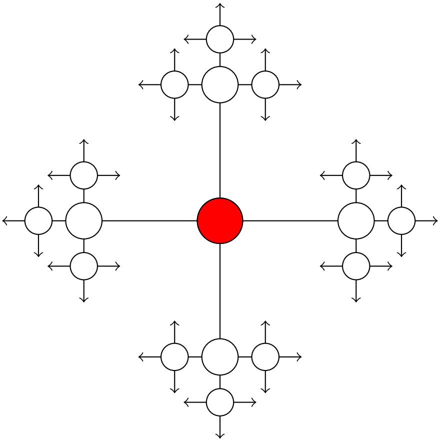
Ejemplos

F_2 tiene infinitas puntas.



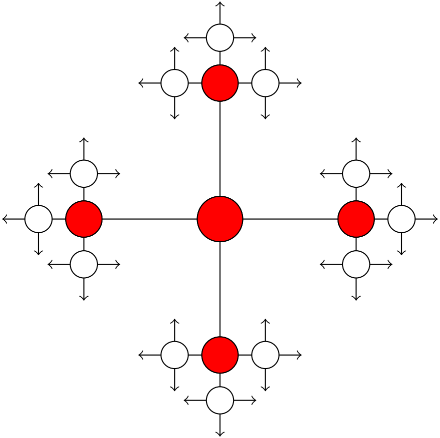
Ejemplos

F_2 tiene infinitas puntas.



Ejemplos

F_2 tiene infinitas puntas.



Otro resultado negativo

Datos curiosos

- Todo grupo f.g. tiene 0,1,2 o ∞ puntas.
- Tiene 0 puntas si y solamente si G es finito.
- Tiene 2 puntas si y solamente si G es virt $\mathbb{Z}$.
- Los grupos con ∞ puntas se pueden caracterizar usando un teorema de Stallings.

Otro resultado negativo

Datos curiosos

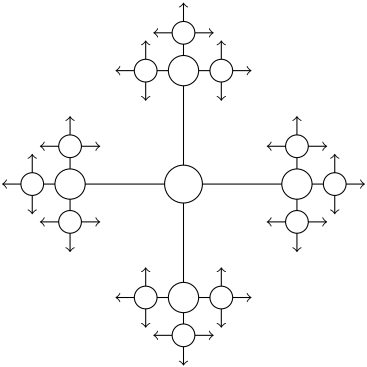
- Todo grupo f.g. tiene 0,1,2 o ∞ puntas.
- Tiene 0 puntas si y solamente si G es finito.
- Tiene 2 puntas si y solamente si G es virt $\mathbb{Z}$.
- Los grupos con ∞ puntas se pueden caracterizar usando un teorema de Stallings.

Teorema [Cohen, 15]

Si G es un grupo f.g. con 2 o ∞ puntas entonces G no admite SFTs fuertemente aperiódicos.

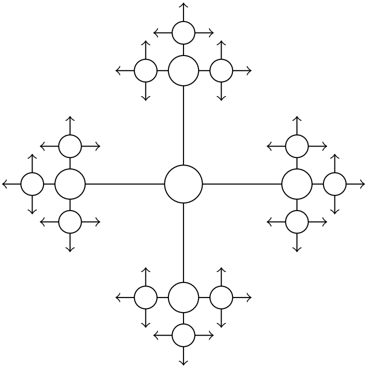
Idea de la prueba: Caso de un grupo libre

- Primero, recodificar el SFT a uno de vecinos más cercanos.



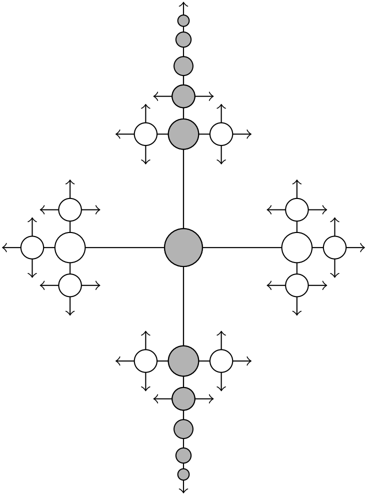
Idea de la prueba: Caso de un grupo libre

- Buscar una copia de $\mathbb{Z}$ en el grupo.



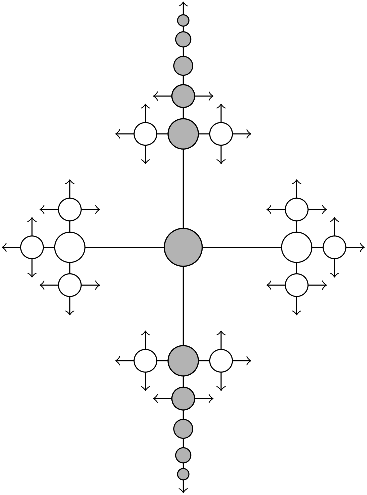
Idea de la prueba: Caso de un grupo libre

- Buscar una copia de $\mathbb{Z}$ en el grupo.



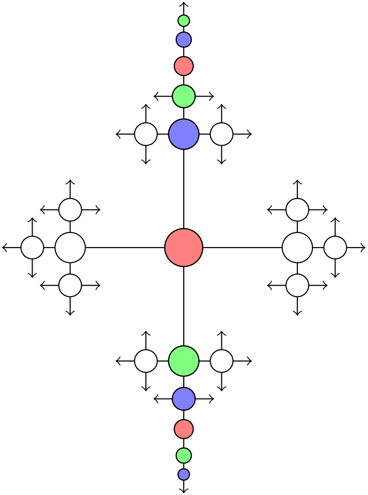
Idea de la prueba: Caso de un grupo libre

- Encontrar una configuración periódica en esa copia



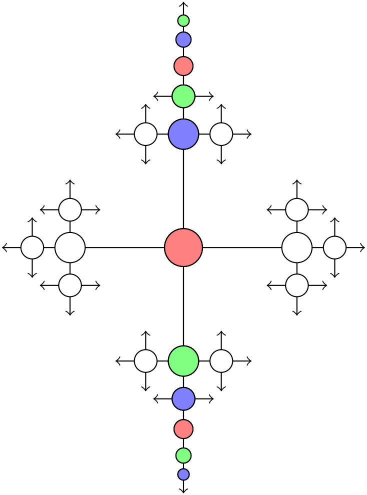
Idea de la prueba: Caso de un grupo libre

- Encontrar una configuración periódica en esa copia



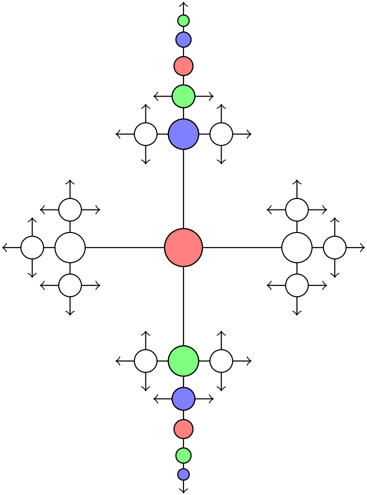
Idea de la prueba: Caso de un grupo libre

- Encontrar una configuración periódica en esa copia que sólo use símbolos que **aparecen** en el SFT.



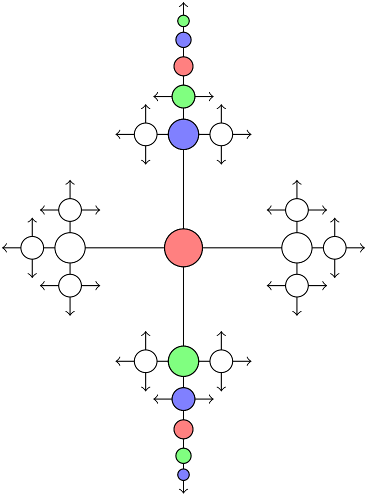
Idea de la prueba: Caso de un grupo libre

- Encontrar una configuración periódica en esa copia que sólo use símbolos que **aparecen** en el SFT.



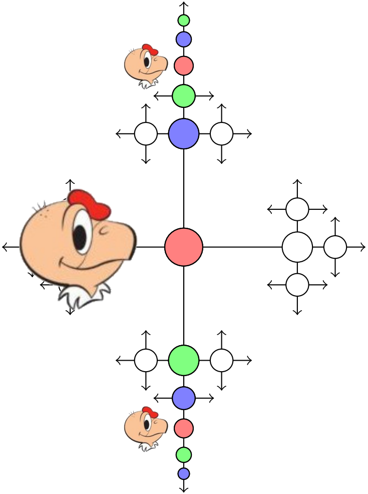
Idea de la prueba: Caso de un grupo libre

- Para cada símbolo que aparece en la coloración, elegir una configuración donde aparece en la identidad.
- Extender a F_k de modo tal que cada elemento esté pintado de acuerdo a la extensión del elemento más cercano en la copia de $\mathbb{Z}$. Las extensiones no interactúan entre ellas dado que el SFT es de vecinos más cercanos.



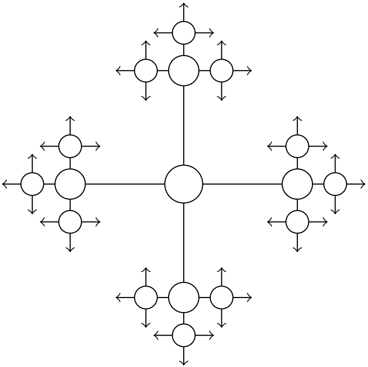
Idea de la prueba: Caso de un grupo libre

- Para cada símbolo que aparece en la coloración, elegir una configuración donde aparece en la identidad.
- Extender a F_k de modo tal que cada elemento esté pintado de acuerdo a la extensión del elemento más cercano en la copia de $\mathbb{Z}$. Las extensiones no interactúan entre ellas dado que el SFT es de vecinos más cercanos.



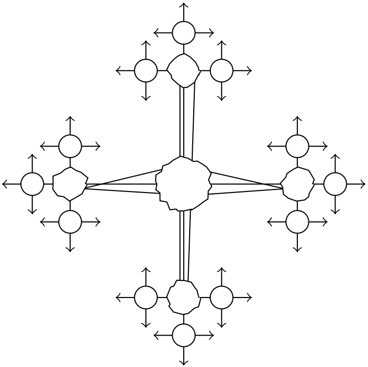
Idea de la prueba: Caso general

- En vez de tener una estructura regular, tenemos algo feo.



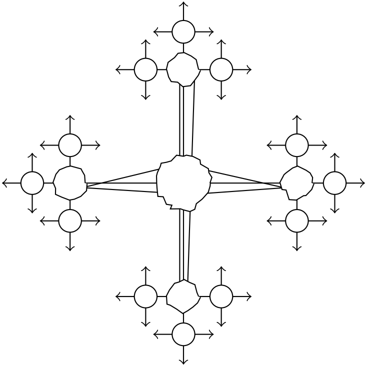
Idea de la prueba: Caso general

- En vez de tener una estructura regular, tenemos algo feo.
- Muy feo.



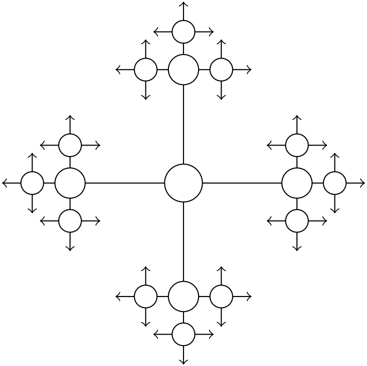
Idea de la prueba: Caso general

- La prueba es similar pero hay que entrecerrar los ojos para ver la estructura anterior.



Idea de la prueba: Caso general

- La prueba es similar pero hay que entrecerrar los ojos para ver la estructura anterior.



Panorama

¿Qué se sabe?: resultado NO.

- (Jeandel 15) Si G es r.p. y tiene problema de la palabra indecidible.
- (Cohen 15) Si G tiene 2 o más puntas.

Mucha negatividad, veamos algunos resultados positivos.

Panorama

¿Qué se sabe?: resultado NO.

- (Jeandel 15) Si G es r.p. y tiene problema de la palabra indecidible.
- (Cohen 15) Si G tiene 2 o más puntas.

Mucha negatividad, veamos algunos resultados positivos.

¿Qué se sabe?: resultados estructurales.

- (Carrol, Penland, 15) Tener un SFT FA es una invariante de conmensurabilidad.
- (Cohen 15) Tener un SFT FA es una invariante de quasi-isometría para grupos finitamente presentados y libres de torsión.

¿Qué se sabe?: resultado **SÍ**. [Lista incompleta]

- (Folklore) $\mathbb{Z}^d$ para $d > 1$.

Panorama

¿Qué se sabe?: resultado SÍ. [Lista incompleta]

- (Folklore) $\mathbb{Z}^d$ para $d > 1$.
- (Şahin, Schraudner, Ugarcovici, 14) El grupo de Heisenberg discreto.

Panorama

¿Qué se sabe?: resultado SÍ. [Lista incompleta]

- (Folklore) $\mathbb{Z}^d$ para $d > 1$.
- (Şahin, Schraudner, Ugarcovici, 14) El grupo de Heisenberg discreto.
- (Cohen, Goodman-Strauss, 15) Los grupos de superficie.

Panorama

¿Qué se sabe?: resultado SÍ. [Lista incompleta]

- (Folklore) $\mathbb{Z}^d$ para $d > 1$.
- (Şahin, Schraudner, Ugarcovici, 14) El grupo de Heisenberg discreto.
- (Cohen, Goodman-Strauss, 15) Los grupos de superficie.
- (Cohen, Goodman-Strauss, Rieck, 17) Los grupos Gromov hiperbólicos con una punta.

Panorama

¿Qué se sabe?: resultado SÍ. [Lista incompleta]

- (Folklore) $\mathbb{Z}^d$ para $d > 1$.
- (Şahin, Schraudner, Ugarcovici, 14) El grupo de Heisenberg discreto.
- (Cohen, Goodman-Strauss, 15) Los grupos de superficie.
- (Cohen, Goodman-Strauss, Rieck, 17) Los grupos Gromov hiperbólicos con una punta.
- (B, Sablik, 16) Los grupos de la forma $\mathbb{Z}^d \rtimes_\varphi G$ con $d > 1$, G f.g. y $\texttt{WP}(G)$ decidible.

Panorama

¿Qué se sabe?: resultado SÍ. [Lista incompleta]

- (Folklore) $\mathbb{Z}^d$ para $d > 1$.
- (Şahin, Schraudner, Ugarcovici, 14) El grupo de Heisenberg discreto.
- (Cohen, Goodman-Strauss, 15) Los grupos de superficie.
- (Cohen, Goodman-Strauss, Rieck, 17) Los grupos Gromov hiperbólicos con una punta.
- (B, Sablik, 16) Los grupos de la forma $\mathbb{Z}^d \rtimes_{\varphi} G$ con $d > 1$, G f.g. y $\texttt{WP}(G)$ decidible.
- (Jeandel, 16) Clasificación en grupos policíclicos.

Panorama

¿Qué se sabe?: resultado SÍ. [Lista incompleta]

- (Folklore) $\mathbb{Z}^d$ para $d > 1$.
- (Şahin, Schraudner, Ugarcovici, 14) El grupo de Heisenberg discreto.
- (Cohen, Goodman-Strauss, 15) Los grupos de superficie.
- (Cohen, Goodman-Strauss, Rieck, 17) Los grupos Gromov hiperbólicos con una punta.
- (B, Sablik, 16) Los grupos de la forma $\mathbb{Z}^d \rtimes_\varphi G$ con $d > 1$, G f.g. y $\texttt{WP}(G)$ decidible.
- (Jeandel, 16) Clasificación en grupos policíclicos.
- (B, 17) Los grupos de la forma $G_1 \times G_2 \times G_3$ con G_i f.g. y $\texttt{WP}(G_i)$ decidible.

Panorama

¿Qué se sabe?: resultado **SÍ**. [Lista incompleta]

- (Folklore) $\mathbb{Z}^d$ para $d > 1$.
- (Şahin, Schraudner, Ugarcovici, 14) El grupo de Heisenberg discreto.
- (Cohen, Goodman-Strauss, 15) Los grupos de superficie.
- (Cohen, Goodman-Strauss, Rieck, 17) Los grupos Gromov hiperbólicos con una punta.
- (B, Sablik, 16) Los grupos de la forma $\mathbb{Z}^d \rtimes_{\varphi} G$ con $d > 1$, G f.g. y $\mathtt{WP}(G)$ decidible.
- (Jeandel, 16) Clasificación en grupos policíclicos.
- (B, 17) Los grupos de la forma $G_1 \times G_2 \times G_3$ con G_i f.g. y $\mathtt{WP}(G_i)$ decidible.
- (B, 17) Todo grupo de ramificación f.g. con problema de la palabra decidible (Ej: grupo de Grigorchuk).

Clasificación en grupos policíclicos.

Teorema [Jeandel, 16]

Si G es un grupo virtualmente polícicico, entonces G admite un SFT fuertemente aperiódico si y solamente si $h(G) > 1$.

Clasificación en grupos policíclicos.

Teorema [Jeandel, 16]

Si G es un grupo virtualmente polícicico, entonces G admite un SFT fuertemente aperiódico si y solamente si $h(G) > 1$.

Para demostrarlo vamos a asumir el teorema siguiente:

Teorema [B, Sablik, 16]

Los grupos de la forma $\mathbb{Z}^d \rtimes_\varphi G$ con $d > 1$, G f.g. y $\mathtt{WP}(G)$ decidible admiten un SFT fuertemente aperiódico.

Clasificación en grupos policíclicos.

Consideremos una secuencia corta

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{\beta} G \xrightarrow{\alpha} H \longrightarrow 1$$

G se puede escribir como un producto semidirecto $N \rtimes_\varphi H$, si existe un homomorfismo $\gamma : H \to G$ tal que $\alpha \circ \gamma = \mathrm{id}.$

Clasificación en grupos policíclicos.

Consideremos una secuencia corta

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{\beta} G \xrightarrow{\alpha} H \longrightarrow 1$$

G se puede escribir como un producto semidirecto $N \rtimes_\varphi H$, si existe un homomorfismo $\gamma : H \to G$ tal que $\alpha \circ \gamma = \mathrm{id}$.

En el caso de:

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^d \xrightarrow{\beta} G \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

Esto siempre se puede hacer y caemos en que $G = \mathbb{Z}^d \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$. Un caso especial del teorema anterior.

Clasificación en grupos policíclicos.

Lema [Jeandel 15]

Si G es un grupo f.g. que contiene dos grupos $H_1 \subset H_2 \subset G$ tal que:

- $H_1 \trianglelefteq G$ y G/H_1 admite un SFT FA.
- H_2 admite un SFT FA.

Entonces G admite un SFT FA.

[Demostración en la pizarra]

Clasificación en grupos policíclicos.

Prueba

Inducción: si $h(G) \leq 2$ todo bien. Supongamos $h(G) = n > 2$.
Existe un subgrupo normal $\mathbb{Z}^d \hookrightarrow G$.

Clasificación en grupos policíclicos.

Prueba

Inducción: si $h(G) \leq 2$ todo bien. Supongamos $h(G) = n > 2$. Existe un subgrupo normal $\mathbb{Z}^d \hookrightarrow G$.

▷ **Caso 1:** $d = n$. Tenemos que $h(G/\mathbb{Z}^n) = h(G) - h(\mathbb{Z}^d) = 0$. Luego G es virt $\mathbb{Z}^n$.

Prueba

Inducción: si $h(G) \leq 2$ todo bien. Supongamos $h(G) = n > 2$. Existe un subgrupo normal $\mathbb{Z}^d \hookrightarrow G$.

$\triangleright$ **Caso 1:** $d = n$. Tenemos que $h(G/\mathbb{Z}^n) = h(G) - h(\mathbb{Z}^d) = 0$. Luego G es virt $\mathbb{Z}^n$.

$$\checkmark$$

Prueba

Inducción: si $h(G) \leq 2$ todo bien. Supongamos $h(G) = n > 2$. Existe un subgrupo normal $\mathbb{Z}^d \hookrightarrow G$.

$\triangleright$ **Caso 2:** $d = n - 1$. Tenemos que $h(G/\mathbb{Z}^{n-1}) = 1$. Luego $G/\mathbb{Z}^{n-1}$ es virt $\mathbb{Z}$. Spg tomamos un subgrupo de índice finito $[G : H] < \infty$ tal que $H = \mathbb{Z}^{n-1} \rtimes \mathbb{Z}$.

Clasificación en grupos policíclicos.

Prueba

Inducción: si $h(G) \leq 2$ todo bien. Supongamos $h(G) = n > 2$.
Existe un subgrupo normal $\mathbb{Z}^d \hookrightarrow G$.

▷ **Caso 2:** $d = n - 1$. Tenemos que $h(G/\mathbb{Z}^{n-1}) = 1$. Luego $G/\mathbb{Z}^{n-1}$ es virt $\mathbb{Z}$. Spg tomamos un subgrupo de índice finito $[G : H] < \infty$ tal que $H = \mathbb{Z}^{n-1} \rtimes \mathbb{Z}$.

$$\checkmark$$

Clasificación en grupos policíclicos.

Prueba

Inducción: si $h(G) \leq 2$ todo bien. Supongamos $h(G) = n > 2$. Existe un subgrupo normal $\mathbb{Z}^d \hookrightarrow G$.

$\triangleright$ **Caso 3:** $1 < d < n-1$. Tenemos que tanto $G/\mathbb{Z}^d$ como $\mathbb{Z}^d$ tienen índice de Hirsch entre 2 y $n-1$. Tomando $H_1 = H_2 = \mathbb{Z}^d$ y usando el lema ganamos.

Clasificación en grupos policíclicos.

Prueba

Inducción: si $h(G) \leq 2$ todo bien. Supongamos $h(G) = n > 2$. Existe un subgrupo normal $\mathbb{Z}^d \hookrightarrow G$.

▷ **Caso 3:** $1 < d < n - 1$. Tenemos que tanto $G/\mathbb{Z}^d$ como $\mathbb{Z}^d$ tienen índice de Hirsch entre 2 y $n - 1$. Tomando $H_1 = H_2 = \mathbb{Z}^d$ y usando el lema ganamos.

$$\checkmark$$

Clasificación en grupos policíclicos.

Prueba

Inducción: si $h(G) \leq 2$ todo bien. Supongamos $h(G) = n > 2$. Existe un subgrupo normal $\mathbb{Z}^d \hookrightarrow G$.

$\triangleright$ **Caso 4:** $d = 1$. $h(G/\mathbb{Z}) = n - 1 \geq 2$ y por HI $H_1 = G/\mathbb{Z}$ admite un SFT FA. Tomando cualquier representante en G de un elemento sin torsión en $G/\mathbb{Z}$ se construye $H_2 \supset H_1$ de índice 2. Usar el Lema para concluir.

Clasificación en grupos policíclicos.

Prueba

Inducción: si $h(G) \leq 2$ todo bien. Supongamos $h(G) = n > 2$.
Existe un subgrupo normal $\mathbb{Z}^d \hookrightarrow G$.

$\triangleright$ **Caso 4:** $d = 1$. $h(G/\mathbb{Z}) = n - 1 \geq 2$ y por HI $H_1 = G/\mathbb{Z}$ admite un SFT FA. Tomando cualquier representante en G de un elemento sin torsión en $G/\mathbb{Z}$ se construye $H_2 \supset H_1$ de índice 2. Usar el Lema para concluir.

$$\checkmark$$

Grupos $\mathbb{Z}^d \rtimes_\varphi G$

En el teorema de clasificación anterior, utilizamos un caso particular de:

Teorema [B, Sablik, 16]

Los grupos de la forma $\mathbb{Z}^d \rtimes_\varphi G$ con $d > 1$, G f.g. y $\texttt{WP}(G)$ decidible admiten un SFT fuertemente aperiódico.

Grupos $\mathbb{Z}^d \rtimes_\varphi G$

En el teorema de clasificación anterior, utilizamos un caso particular de:

Teorema [B, Sablik, 16]

Los grupos de la forma $\mathbb{Z}^d \rtimes_\varphi G$ con $d > 1$, G f.g. y $\texttt{WP}(G)$ decidible admiten un SFT fuertemente aperiódico.

¿Cómo se demuestra esto?

Grupos $\mathbb{Z}^d \rtimes_\varphi G$

En el teorema de clasificación anterior, utilizamos un caso particular de:

Teorema [B, Sablik, 16]

Los grupos de la forma $\mathbb{Z}^d \rtimes_\varphi G$ con $d > 1$, G f.g. y $\mathtt{WP}(G)$ decidible admiten un SFT fuertemente aperiódico.

¿Cómo se demuestra esto?

Es una aplicación de un teorema de **simulación** más general.

Simulación

Definición: Acción efectiva

Una acción $G \curvearrowright X \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ de un grupo f.g. se dice *efectiva* si puede ser descrita por máquinas de Turing:

- $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup_{w \in L}[w]$, donde L es un lenguaje RE.
- El lenguaje de los $(s, w, v) \in S \times \{0,1\}^* \times \{0,1\}^*$ tal que $[v] \cap s([w]) = \emptyset$ es RE.

$\triangleright$ Es decir, puedo describir la acción y el complemento del espacio con un algoritmo.

Simulación 1.0

Teorema: [Hochman 2009]

Para toda acción efectiva $T : \mathbb{Z} \curvearrowright X \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ existe un $\mathbb{Z}^3$-SFT $\hat{X}$ tal que una de sus $\mathbb{Z}$-subacciones es una extensión de T.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}^3 & (\hat{X}, \sigma) \arrow[d, "\text{subacción}"'] & \\
\mathbb{Z} & (\hat{X}, \sigma|_{\mathbb{Z}}) \arrow[r, two heads, "\text{factor}"'] & (X, T)
\end{tikzcd}$$

Simulación 3.0

Teorema: [B, Sablik 2016]

Para toda acción efectiva $T : G \curvearrowright X \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ de un grupo f.g. y todo homomorfismo $\varphi : G \to GL(2,\mathbb{Z})$ existe un $(\mathbb{Z}^2 \rtimes_\varphi G)$-SFT $\hat{X}$ tal que su G-subacción es una extensión de T.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}^2 \rtimes_\varphi G & (\hat{X}, \sigma) \arrow[d, "\text{subacción}"'] & \\
G & (\hat{X}, \sigma|_G) \arrow[r, two heads, "\text{factor}"'] & (X, T)
\end{tikzcd}
$$

Simulación 2.0

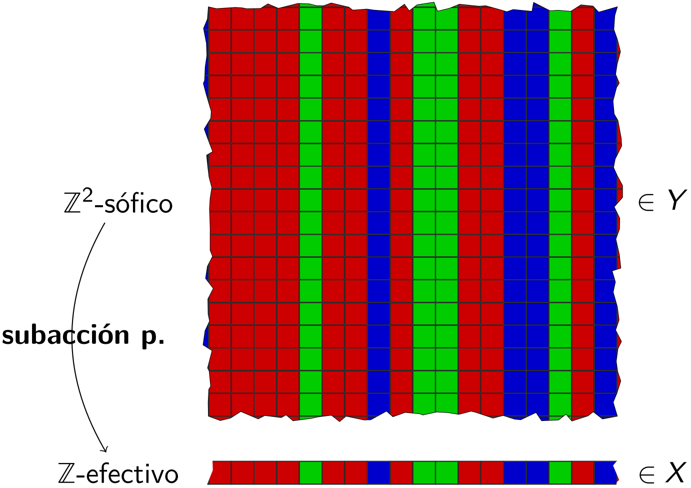
Hay una versión que funciona únicamente para acciones expansivas, pero requiere de un aumento menor en la dimensión.

Teorema: (Aubrun-Sablik 10, Durand-Romaschenko-Shen 10)

Todo $\mathbb{Z}$-subshift efectivo es la subacción proyectiva de un $\mathbb{Z}^2$-subshift sófico.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}^2 & (\hat{X},\sigma) \arrow[r, two heads, "\text{factor CVD}"'] \arrow[d, "\text{subacción}"'] & (\hat{Y},\sigma) \arrow[d, "\text{subacción proy.}"'] \\
\mathbb{Z} & (\hat{X},\sigma|_{\mathbb{Z}}) \arrow[r, two heads, "\text{factor}"'] & (X,T)
\end{tikzcd}$$

Simulación 2.0



¿Ok, pero cual es la relación entre simulación y aperiodicidad?

Es difícil construir directamente un $\mathbb{Z}^2$-SFTs que sea FA. Sin embargo, encontrar un $\mathbb{Z}$-subshift efectivo y FA es facilito.

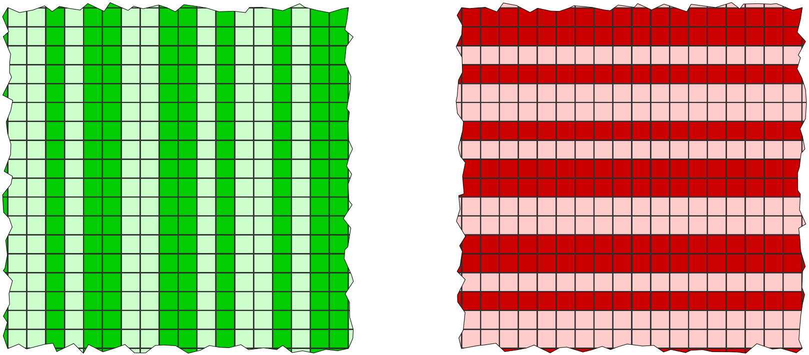
¿Ok, pero cual es la relación entre simulación y aperiodicidad?

Es difícil construir directamente un $\mathbb{Z}^2$-SFTs que sea FA. Sin embargo, encontrar un $\mathbb{Z}$-subshift efectivo y FA es facilito.

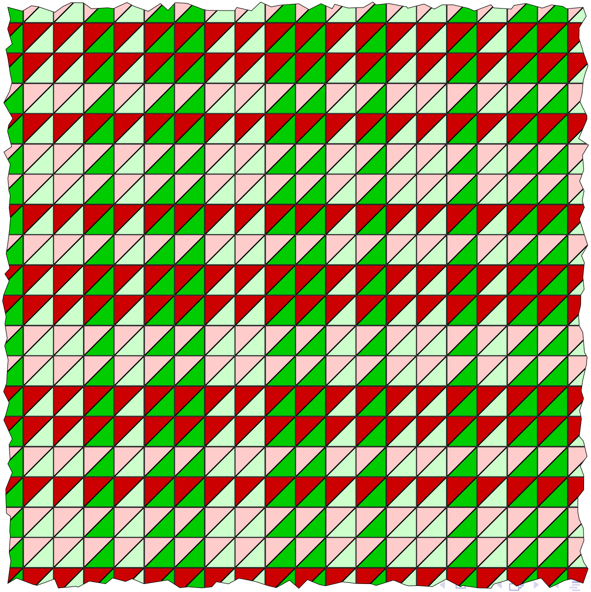
Ejemplo

Un subshift sturmiano de pendiente β irracional y calculable (por ej β algebraico).

¿Ok, pero cual es la relación entre simulación y aperiodicidad?



¿Ok, pero cual es la relación entre simulación y aperiodicidad?



¿Cómo demostrar este tipo de teorema?

Hagámoslo en un caso más fácil: $G \times \mathbb{Z}^2$. Tomemos

$G \curvearrowright X \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

¿Cómo demostrar este tipo de teorema?

Hagámoslo en un caso más fácil: $G \times \mathbb{Z}^2$. Tomemos

$G \curvearrowright X \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Consideremos la codificación $\Psi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1,\$\}^{\mathbb{Z}}$ dada por:

$$\Psi(x)_j = \begin{cases} x_n & \text{si } j = 3^n \text{mod} 3^{n+1} \\ \$ & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

¿Cómo demostrar este tipo de teorema?

Hagámoslo en un caso más fácil: $G \times \mathbb{Z}^2$. Tomemos

$G \curvearrowright X \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Consideremos la codificación $\Psi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1,\$\}^{\mathbb{Z}}$ dada por:

$$\Psi(x)_j = \begin{cases} x_n & \text{si } j = 3^n \text{mod} 3^{n+1} \\ \$ & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

Example

Si escribo $x = x_0 x_1 x_2 x_3 \dots$ obtendría,

$$\Psi(x) = \dots \$x_0\$x_1x_0\$\$x_0\$x_2x_0\$x_1x_0\$\$x_0\$\$x_0\$x_1x_0\$\$x_0\$x_3x_0 \dots$$

¿Cómo demostrar este tipo de teorema?

$$\ldots \$x_0\$x_1x_0\$\$x_0\$x_2x_0\$x_1x_0\$\$x_0\$\$x_0\$x_1x_0\$\$x_0\$x_3x_0\$\ldots$$

¿Cómo demostrar este tipo de teorema?

$$\ldots\$x_0\$x_1x_0\$\$x_0\$x_2x_0\$x_1x_0\$\$x_0\$\$x_0\$x_1x_0\$\$x_0\$x_3x_0\$\ldots$$

$$\downarrow$$

$$\ldots\$\color{red}{x_0\$}x_1\color{red}{x_0\$}\$\color{red}{x_0\$}x_2\color{red}{x_0\$}x_1\color{red}{x_0\$}\$\color{red}{x_0\$}\$\color{red}{x_0\$}x_1\color{red}{x_0\$}\$\color{red}{x_0\$}x_3\color{red}{x_0\$}\ldots$$

¿Cómo demostrar este tipo de teorema?

$$\ldots \$x_0\$x_1x_0\$\$x_0\$x_2x_0\$x_1x_0\$\$x_0\$\$x_0\$x_1x_0\$\$x_0\$x_3x_0\$ \ldots$$

$$\downarrow$$

$$\ldots \$x_0\$x_1x_0\$\$x_0\$x_2x_0\$x_1x_0\$\$x_0\$\$x_0\$x_1x_0\$\$x_0\$x_3x_0\$ \ldots$$

$$\downarrow$$

$$\ldots \$ \quad x_1 \quad \$ \quad x_2 \quad x_1 \quad \$ \quad \$ \quad x_1 \quad \$ \quad x_3 \quad \ldots$$

¿Cómo demostrar este tipo de teorema?

$$\ldots\$x_0\$x_1x_0\$\$x_0\$x_2x_0\$x_1x_0\$\$x_0\$\$x_0\$x_1x_0\$\$x_0\$x_3x_0\$\ldots$$

$$\downarrow$$

$$\ldots\$x_0\$x_1x_0\$\$x_0\$x_2x_0\$x_1x_0\$\$x_0\$\$x_0\$x_1x_0\$\$x_0\$x_3x_0\$\ldots$$

$$\downarrow$$

$$\ldots\$ \quad x_1 \quad \$ \quad x_2 \quad x_1 \quad \$ \quad \$ \quad x_1 \quad \$ \quad x_3 \quad \ldots$$

$$\downarrow$$

$$\ldots\$x_1\$x_2x_1\$\$x_1\$x_3x_1\$x_2x_1\$\$x_1\$\$x_1\$x_2x_1\$\$x_1\$x_4x_1\$\ldots$$

¿Cómo demostrar este tipo de teorema?

▷ Fijar un conjunto finito S de generadores de G.
▷ Construir un subshift Π donde cada configuración es una S-tupla de secuencias Toeplitz como antes.

$$S = \{1_G, s_1, \ldots s_n\}$$

$$\begin{pmatrix} \Psi(x) \\ \Psi(T^{s_1}(x)) \\ \vdots \\ \Psi(T^{s_n}(x)) \end{pmatrix} \in \Pi$$

¿Cómo demostrar este tipo de teorema?

▷ Fijar un conjunto finito S de generadores de G.
▷ Construir un subshift Π donde cada configuración es una S-tupla de secuencias Toeplitz como antes.

$$S = \{1_G, s_1, \dots s_n\}$$

$$\begin{pmatrix} \Psi(x) \\ \Psi(T^{s_1}(x)) \\ \vdots \\ \Psi(T^{s_n}(x)) \end{pmatrix} \in \Pi$$

Afirmación

Si la acción de G era efectiva, entonces Π también.

¿Cómo demostrar este tipo de teorema?

▷ Tomemos Π y usamos simulación 2.0 para construir un $\mathbb{Z}^2$ subshift $\widetilde{\Pi}$ sófico que tiene a Π en sus filas.

¿Cómo demostrar este tipo de teorema?

$\triangleright$ Tomemos Π y usamos simulación 2.0 para construir un $\mathbb{Z}^2$ subshift $\widetilde{\Pi}$ sófico que tiene a Π en sus filas.

$\triangleright$ Usando el mapeo de decodificación anterior, se puede definir un factor (no simbólico) de $\widetilde{\Pi}$ to X.

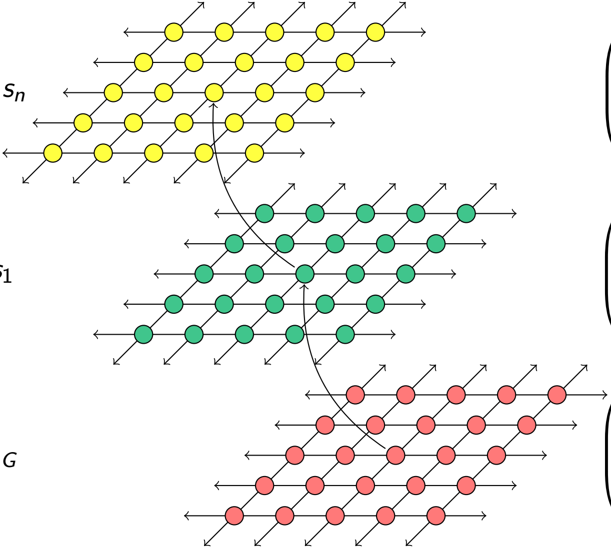
¿Cómo demostrar este tipo de teorema?

▷ Tomemos Π y usamos simulación 2.0 para construir un $\mathbb{Z}^2$ subshift $\widetilde{\Pi}$ sófico que tiene a Π en sus filas.

▷ Usando el mapeo de decodificación anterior, se puede definir un factor (no simbólico) de $\widetilde{\Pi}$ to X.

▷ Pongamos en $G \times \mathbb{Z}^2$ a configuration of $\widetilde{\Pi}$ en cada clase lateral de $\mathbb{Z}^2$.

¿Cómo demostrar este tipo de teorema?



$s_1 s_n$

$$\begin{pmatrix} \Psi(z) \\ \Psi(T^{s_1}(z)) \\ \vdots \\ \Psi(T^{s_n}(z)) \end{pmatrix} \in \widetilde{\Pi}$$

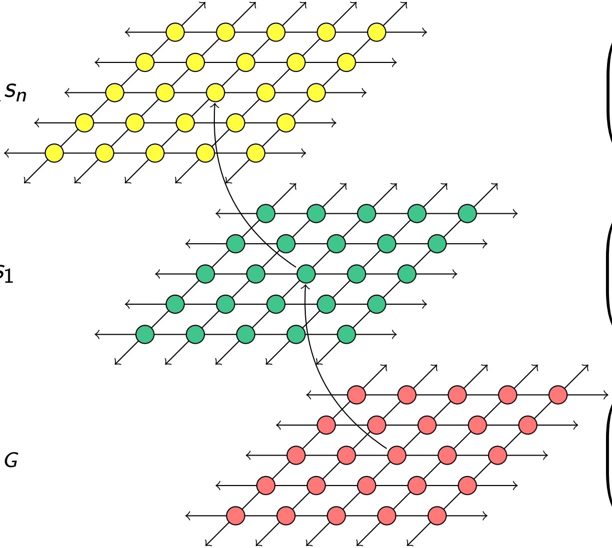
s_1

$$\begin{pmatrix} \Psi(y) \\ \Psi(T^{s_1}(y)) \\ \vdots \\ \Psi(T^{s_n}(y)) \end{pmatrix} \in \widetilde{\Pi}$$

1_G

$$\begin{pmatrix} \Psi(x) \\ \Psi(T^{s_1}(x)) \\ \vdots \\ \Psi(T^{s_n}(x)) \end{pmatrix} \in \widetilde{\Pi}$$

¿Cómo demostrar este tipo de teorema?

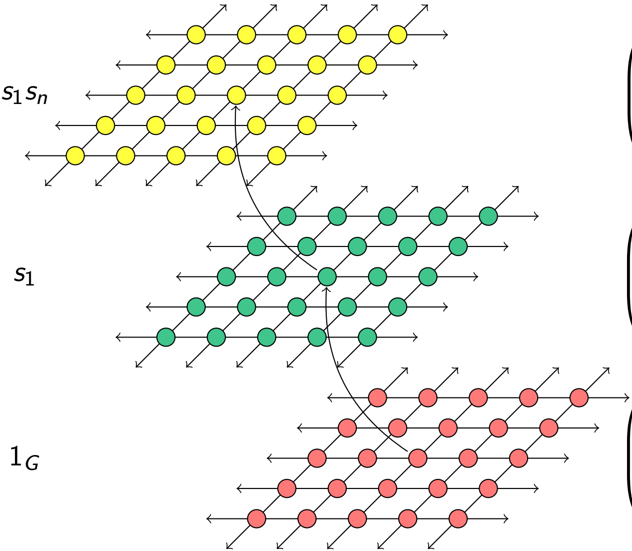


$$\begin{pmatrix} \Psi(z) \\ \Psi(T^{s_1}(z)) \\ \vdots \\ \Psi(T^{s_n}(z)) \end{pmatrix} \in \widetilde{\Pi}$$

$$\begin{pmatrix} \color{red}{\Psi(y)} \\ \Psi(T^{s_1}(y)) \\ \vdots \\ \Psi(T^{s_n}(y)) \end{pmatrix} \in \widetilde{\Pi}$$

$$\begin{pmatrix} \Psi(x) \\ \color{red}{\Psi(T^{s_1}(x))} \\ \vdots \\ \Psi(T^{s_n}(x)) \end{pmatrix} \in \widetilde{\Pi}$$

¿Cómo demostrar este tipo de teorema?

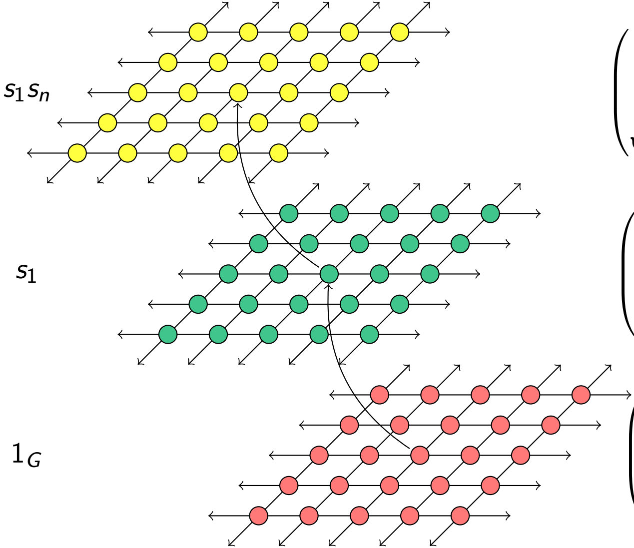


$$\begin{pmatrix} \Psi(z) \\ \Psi(T^{s_1}(z)) \\ \vdots \\ \Psi(T^{s_n}(z)) \end{pmatrix} \in \widetilde{\Pi}$$

$$\begin{pmatrix} \Psi(y) \\ \Psi(T^{s_1}(y)) \\ \vdots \\ \Psi(T^{s_n}(y)) \end{pmatrix} \in \widetilde{\Pi}$$

$$\begin{pmatrix} \Psi(x) \\ \Psi(T^{s_1}(x)) \\ \vdots \\ \Psi(T^{s_n}(x)) \end{pmatrix} \in \widetilde{\Pi}$$

¿Cómo demostrar este tipo de teorema?



$$\begin{pmatrix} \Psi(T^{s_1 s_n}(x)) \\ \Psi(T^{s_1 s_1 s_n}(x)) \\ \vdots \\ \Psi(T^{s_n s_1 s_n}(x)) \end{pmatrix} \in \widetilde{\Pi}$$

$$\begin{pmatrix} \Psi(T^{s_1}(x)) \\ \Psi(T^{s_1 s_1}(x)) \\ \vdots \\ \Psi(T^{s_1 s_n}(x)) \end{pmatrix} \in \widetilde{\Pi}$$

$$\begin{pmatrix} \Psi(x) \\ \Psi(T^{s_1}(x)) \\ \vdots \\ \Psi(T^{s_n}(x)) \end{pmatrix} \in \widetilde{\Pi}$$

¡Gracias por su atención!