



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

SUBSHIFTS GENERADOS POR SUSTITUCIONES MULTIDIMENSIONALES

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

SEBASTIÁN ANDRÉS BARBIERI LEMP

PROFESOR GUÍA:
MICHAEL SCHRAUDNER

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
MICHAEL SCHRAUDNER
ALEJANDRO MAASS SEPÚLVEDA
SERVET MARTÍNEZ AGUILERA

SANTIAGO DE CHILE
ENERO 2014

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR AL
TÍTULO DE: INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: SEBASTIÁN ANDRÉS BARBIERI LEMP
FECHA: 18/01/2014
PROFESOR GUÍA: MICHAEL SCHRAUDNER

SUBSHIFTS GENERADOS POR SUSTITUCIONES MULTIDIMENSIONALES

La presente memoria tiene como objetivo estudiar subshifts generados por sustituciones multidimensionales. Los sistemas dinámicos generados por sustituciones unidimensionales han sido ampliamente estudiados y existe una vasta teoría al respecto [6]. Un teorema importante de la teoría en el caso multidimensional fue demostrado el año 1989 por Mozes [18] y clasifica una gran cantidad de sistemas generados por \mathbb{Z}^2 -sustituciones dentro de la clase de \mathbb{Z}^2 -subshifts de tipo sófico. Dicho teorema si bien es bastante general y permite comprender mejor las propiedades dinámicas de estos sistemas, no abarca la clase de subshifts límites generados por una sustitución, ni tampoco entrega información sobre si los sistemas generados por sustituciones son \mathbb{Z}^2 -SFT de tipo finito o no. Una extensión del teorema de Mozes para el caso de subshifts límites generados por \mathbb{Z}^2 -sustituciones cuadradas de tamaño 2 fue probada recientemente por Ollinger [16].

La primera parte de este trabajo entrega algunos conceptos básicos de sistemas dinámicos topológicos y de dinámica simbólica que son necesarios para entender los argumentos que se utilizan en el resto del escrito. Posteriormente se estudian las \mathbb{Z}^d -sustituciones junto con los sistemas dinámicos generados por ellas y se introduce el teorema de Mozes [18]. Luego se estudia el embaledado de Robinson [23], el cual es un ejemplo clásico de un \mathbb{Z}^2 -SFT no vacío sin puntos periódicos que posee una estructura jerárquica interesante. Dicho sistema se generaliza de modo tal que dependa de dos números naturales $k, l \geq 2$ de modo tal que la estructura jerárquica tenga formas rectangulares que dependen de k y l .

En el capítulo siguiente se extiende el resultado de Mozes para el caso de \mathbb{Z}^2 -subshifts límites generados por sustituciones rectangulares de tamaño arbitrario, así generalizando el resultado de Ollinger a un contexto más amplio. Para ello se utiliza una técnica distinta que emplea la estructura del embaledado de Robinson generalizado para codificar en una secuencia de látices contenidos en dicha estructura el pasado completo de un punto de este tipo de subshifts bajo la acción de una sustitución.

En el último capítulo se discute brevemente el problema de clasificar los subshifts generados por \mathbb{Z}^2 -sustituciones en subclases de los \mathbb{Z}^2 -subshifts de tipo sófico y posteriormente se estudia la existencia de \mathbb{Z}^2 -SFT minimales que no se reducen a una órbita finita y que son generados por sustituciones. Se culmina el capítulo con la construcción explícita de dicho objeto mostrando así que el problema de clasificación debe necesariamente considerar la existencia de dichas estructuras.

Agradecimientos

Agradezco enormemente a mi profesor guía Michael Schraudner por el gran apoyo que me ha entregado durante el proceso de escribir mi memoria, tanto las discusiones sobre los tópicos de ésta como sus correcciones al momento de escribirla han sido invaluable.

Doy las gracias también a los demás académicos de ingeniería civil matemática, por la formación que me han entregado y por las numerosas horas de entretención resolviendo problemas que me han brindado.

Del mismo modo deseo agradecer también a mis amigos y compañeros del departamento de ingeniería matemática y en especial a mis compañeros de generación, por muchos inolvidables momentos amenos y por su apoyo incondicional en los momentos más difíciles.

También agradezco a mi familia y en especial a mis padres por el soporte y cariño entregados durante estos años. En particular deseo agradecer a mi prima y a sus padres, por recibirme en Santiago y brindarme un hogar. Por último deseo agradecer a mi pareja Alejandra, por el cariño que me ha transmitido durante estos años.

Tabla de contenido

Introducción	1
1. Conceptos básicos sobre sistemas dinámicos topológicos y espacios de shift	3
1.1. Sistemas dinámicos topológicos	3
1.2. Espacios de shift	5
1.3. Subshifts de tipo finito	9
1.4. Subshifts de tipo sófico	12
2. Sustituciones	15
2.1. Sustituciones unidimensionales	16
2.2. Sustituciones multidimensionales	17
2.3. Teorema de Mozes	23
3. \mathbb{Z}^2-subshifts de tipo finito sin puntos periódicos	25
3.1. Una introducción histórica al problema de existencia de \mathbb{Z}^2 -SFT sin puntos periódicos	25
3.2. El embaledado de Robinson	27
3.3. Una generalización: El embaledado de Robinson generalizado	33
3.4. X_{Rob}^{\min} y $X_{\text{Rob}}^{\min}(k, l)$ son \mathbb{Z}^2 -subshifts de tipo sófico.	43
4. Una versión del teorema de Mozes para \mathbb{Z}^2-subshifts límites generados por sustituciones rectangulares	49
4.1. Construcción de una extensión SFT para \mathbb{Z}^2 -subshifts límites generados por \mathbb{Z}^2 -sustituciones cuadradas de tamaño 2	50
4.2. Extensión SFT para \mathbb{Z}^2 -subshifts límites generados por \mathbb{Z}^2 -sustituciones rec- tangulares	62
5. Un \mathbb{Z}^2-SFT minimal no trivial generado por una sustitución	74
5.1. Construcción de un contraejemplo	75
Conclusión	81
Bibliografía	83

Índice de figuras

1.1. Un embaldosado de Wang cuyos puntos corresponden a un tablero de ajedrez infinito.	13
2.1. La regla que genera el copo de nieve de Koch.	15
3.1. Las baldosas del ejemplo de Kari-Culik.	26
3.2. Las protobaldosas originales del embaldosado de Robinson.	27
3.3. Las baldosas básicas del shift de Robinson.	27
3.4. Casos posibles para patrones de tamaño 3×3	29
3.5. La estructura de un supertile de nivel $n > 1$. Los cuadrados grandes corresponden a los supertiles de orden $n - 1$ de la definición. Todas las baldosas en este supertile están determinadas por la baldosa central.	30
3.6. Un supertile de orden 2. Los otros tres supertiles de orden 2 son rotaciones de este.	30
3.7. Un supertile de orden 3. Los otros tres supertiles de orden 3 son rotaciones de este.	31
3.8. Esquema de deducción que cada cruz del 2-látice debe estar en un supertile de orden 2.	31
3.9. Estructura típica de un punto de X_{Rob} formado por cuatro supertiles de nivel infinito. Las líneas que separan dichos supertiles están compuestas de baldosas de extensión y se denominan líneas de falla.	32
3.10. Estructura de un (k, l) -supertile de nivel $n \in \mathbb{N}$ en $X_{\text{Rob}}(k, l)$. Cada rectángulo representa un (k, l) -supertile de nivel $n - 1$. Se han omitido las tuplas por simplicidad.	40
3.11. Un $(3, 2)$ -supertile de orden 2 en $X_{\text{Rob}}(3, 2)$	40
3.12. Un $(2, 3)$ -supertile de orden 3 en $X_{\text{Rob}}(2, 3)$	41
3.13. Esquema de deducción que cada cruz debe estar en un (k, l) -supertile de nivel 2 para el caso $(k, l) = (2, 3)$	42
3.14. Las cruces modificadas de $X_{\text{Rob}}^{\text{dec}}(k, l)$	44
3.15. A cada baldosa de $X_{\text{Rob}}(k, l)$ que no sea una cruz, se permite agregarle una línea horizontal y una línea vertical de una de las formas mostradas acá.	44
3.16. Un $(2, 3)$ -supertile de orden 3 en $X_{\text{Rob}}^{\text{dec}}(2, 3)$. La definición de supertile es análoga.	45
3.17. Esquema de demostración. Las cruces de las esquinas de un supertile fuerzan que las cruces fuera de éste también esten coordinadas. La cruz central del supertile está ubicada en la coordenada $(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$	46
4.1. El resultado de aplicar la sustitución s_H dos veces al símbolo $a \in \mathcal{A}$	53

4.2.	Casos posibles para patrones de tamaño 3×3 en Y_s	53
4.3.	Esquema de demostración: la regla central fuerza las baldosas de unión, que a su vez fuerzan las baldosas centrales de cada uno de los supertiles de nivel $n - 1$ en las esquinas a contener reglas.	57
4.4.	Estructura de un punto de X_s^H con dos líneas infinitas donde aún no es definido y una posibilidad para rellenar esas líneas. Se muestran ambas componentes en cada línea. Todas las letras en esta figura son símbolos de \mathcal{A}	60
4.5.	El resultado de aplicar la sustitución $s_H^{2,3}$ dos veces al símbolo $a \in \mathcal{A}$	66
4.6.	Esquema de deducción de la proposición 4.12 para el caso $n = 2$ (se muestran las baldosas de la segunda componente). Los puntos denotan elementos de $\mathcal{A}_H^{k,l}$ desconocidos, y se usa la notación $a_{i,j} := s(a)_{i,j}$ para $a \in \mathcal{A}$	69
5.1.	A la izquierda un patrón $P \in \mathcal{L}_{2 \times 2}(Y)$ cuadrado de tamaño 2 en Y (se nota la repetición en las filas y columnas 3 y 4). En vez de utilizar esta representación redundante, se utiliza la representación de la derecha, donde se colapsan estas repeticiones.	76
5.2.	Forma general de una regla dada por s . El bloque de la izquierda representa a un símbolo $A \in \mathcal{A}(Y)$ y el bloque de la derecha su imagen bajo s . El hecho de que a_5 sea una cruz del 2-látice asegura que la imagen $s(A)$ contiene un supertile de nivel 2 en su centro de tamaño 3×3 y que todas las baldosas que llevan el símbolo ? están determinadas únicamente por los símbolos a_i con $i \in \{1, \dots, 9\}$	77
5.3.	Dos ejemplos que siguen la estructura de la figura 5.2. Las líneas azules no se muestran por simplicidad.	78
5.4.	Un supertile de nivel 3 de Y generado por $s^2(\cdot)$. Todas las baldosas que aparecen con el símbolo ? están determinadas por el resto de las baldosas. Por simplicidad no se muestran las líneas azules.	79

Introducción

En la presente investigación se estudian los subshifts generados por sustituciones multidimensionales. A grandes rasgos una sustitución s es una función que actúa sobre un conjunto finito \mathcal{A} asociándole a cada elemento de \mathcal{A} una configuración de elementos de dicho conjunto ordenados espacialmente en un subconjunto finito S de un grupo G . En lo que respecta a este estudio se analiza el caso en que $G = \mathbb{Z}^2$ y S es un rectángulo finito de puntos en \mathbb{Z}^2 . A partir de dicho objeto y su generalización donde actúa sobre puntos de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ se definen dos tipos de sistemas dinámicos asociados a la sustitución s que provienen de distintos enfoques. Uno de ellos es puramente combinatorial y tiene que ver con las configuraciones locales que pueden aparecer en un punto de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ mientras que el otro tiene que ver con el conjunto límite asociado al sistema dinámico $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}, \mathcal{S})$ donde $\mathcal{S} := \{s^n | n \in \mathbb{N}\}$.

El estudio de los subshifts generados por sustituciones es de importancia en el contexto de la dinámica simbólica dado que entrega una herramienta para construir sistemas dinámicos minimales y de entropía topológica 0 de manera sencilla. Es por esto que es de especial relevancia el estudio de sus propiedades dinámicas. En particular es interesante clasificar dichos sistemas en términos de las clases que usualmente se utilizan en la dinámica simbólica, es decir, saber si dichos sistemas son subshifts de tipo finito, o si son sóficos entrega gran cantidad de información sobre ellos.

En la dirección anterior, un teorema de Mozes [18] prueba que una gran clase de los \mathbb{Z}^2 -subshifts generados por sustituciones es de tipo sófico. Dicha prueba consiste en la construcción explícita de un embaldosado que genera una extensión de tipo finito para el sistema en cuestión. Lamentablemente la prueba de Mozes es específica para el caso que desea demostrar y no resulta evidente como modificar dicha prueba para extender dicho resultado a otros \mathbb{Z}^2 -subshifts que provienen de sustituciones ni es evidente como llevar el resultado a mayores dimensiones. En la dirección anterior un resultado de Goodman-Strauss [11] generaliza el resultado a dimensiones superiores y al caso en que la sustitución es geométrica y cumple condiciones relativamente débiles. Sin embargo la construcción es extremadamente elaborada y es presentada sin muchos detalles.

Un resultado reciente de Ollinger [16] muestra que los \mathbb{Z}^2 -subshifts límites generados por sustituciones cuadradas de tamaño 2 son de tipo sófico, mostrando así una versión distinta del teorema de Mozes para este tipo de sistemas dinámicos. En esta memoria se desarrolla una demostración de que los \mathbb{Z}^2 -subshifts límites generados por sustituciones rectangulares son también de tipo sófico, así extendiendo el resultado de Ollinger a una clase más amplia de \mathbb{Z}^2 -subshifts. Si bien esta prueba al igual que la de Mozes solo se realiza para el caso de

\mathbb{Z}^2 , se entregan ideas en la conclusión de como es posible extender el resultado a dimensiones mayores.

Para llevar a cabo la demostración anterior, es necesario utilizar la estructura de un emba-dosado muy conocido el cual se denomina emba-dosado de Robinson [23]. Dicho emba-dosado es históricamente una de las primeras construcciones explícitas simples de \mathbb{Z}^2 -subshifts de tipo finito no vacíos y sin puntos periódicos. Su importancia para el teorema anterior es que posee una estructura jerárquica que permite almacenar información en sus baldosas sobre el pasado infinito de preimágenes de un punto bajo la acción de una sustitución cuadrada s . Para utilizar dicha estructura en el caso de sustituciones rectangulares se generaliza el shift de Robinson modificando la estructura jerárquica de modo que permita hacer lo anterior para el caso de una sustitución rectangular de tamaño arbitrario.

Otra arista del estudio de estos sistemas es refinar las clases en las que se encuentran. El teorema de Mozes asegura que todos los \mathbb{Z}^2 -subshifts generados (usando el enfoque combinatorial) por \mathbb{Z}^2 -sustituciones son de tipo sófico, sin embargo no entrega información sobre cuales \mathbb{Z}^2 -sustituciones entregan \mathbb{Z}^2 -subshifts de tipo finito y cuales entregan \mathbb{Z}^2 -subshifts estrictamente sóficos. En ese sentido se estudia que tipo de \mathbb{Z}^2 -subshifts de tipo finito se pueden obtener utilizando sustituciones primitivas y se muestra que es posible obtener \mathbb{Z}^2 -SFT minimales, no vacíos y sin puntos periódicos mediante la construcción explícita de un ejemplo. Así probando que en cualquier clasificación sobre los \mathbb{Z}^2 -subshifts minimales generados por sustituciones es necesario considerar que pueden aparecer subshifts de tipo finito sin puntos periódicos, cuestión que no ocurre en el caso unidimensional.

Capítulo 1

Conceptos básicos sobre sistemas dinámicos topológicos y espacios de shift

En este capítulo se desarrollan algunos conceptos elementales de la teoría de sistemas dinámicos topológicos. El objetivo de esta sección es entregar las definiciones y la notación que será utilizada posteriormente en el resto del escrito.

1.1. Sistemas dinámicos topológicos

Un sistema dinámico consiste de un par (X, T) donde X es un conjunto y T es una acción de un grupo (o un semigrupo) G . Esto significa que $T : G \times X \rightarrow X$ y que cumple las relaciones $T_0 = \text{id}_X$ donde 0 es el neutro de G y $\forall g, h \in G: T_{gh} = T_g \circ T_h$.

Si X está dotado de una topología de modo tal que $\forall g \in G$ las transformaciones $T_g : X \rightarrow X$ son funciones continuas, entonces diremos que (X, T) es un sistema dinámico topológico (s.d.t.). Para el propósito de esta memoria, solo se consideran s.d.t. donde los espacios son métricos compactos.

Definición 1.1 *Consideremos (X, T) e (Y, S) dos sistemas dinámicos topológicos (métricos compactos) con acciones sobre el mismo grupo G y una función continua $\phi : X \rightarrow Y$ que conmuta con las acciones, es decir $\forall g \in G$ se cumple que $\phi \circ T_g = S_g \circ \phi$. Entonces:*

1. Si ϕ es sobreyectiva diremos que ϕ es un código factor y se denotará $\phi : X \twoheadrightarrow Y$. Si existe un código factor entre X e Y entonces diremos que Y es un factor de X y que X es una extensión de Y . Lo anterior se denota $(X, T) \twoheadrightarrow (Y, S)$.
2. Si ϕ es inyectiva diremos que ϕ es un encaje o incrustación y se denotará $\phi : X \hookrightarrow Y$.
3. Si ϕ es biyectiva diremos que ϕ es una conjugación topológica o simplemente una conjugación, se denotará $\phi : X \xrightarrow{\sim} Y$. Si existe una conjugación entre dos s.d.t. X e Y

se dirá que son conjugados lo cual se denota $(X, T) \simeq (Y, S)$.

El concepto de código factor es de gran importancia para la teoría debido a que la existencia de un código factor ϕ entre dos s.d.t. X e Y permite deducir características en uno de los sistemas conociendo propiedades del otro. Por ejemplo: si X es un s.d.t. minimal (se define más adelante) entonces Y también lo es. También es posible caracterizar clases importantes de sistemas mediante la existencia de códigos factores. Por ejemplo: la clase de los \mathbb{Z} -subshifts tal que sus puntos se pueden representar como caminos bi-infinitos en un digrafo etiquetado corresponde exactamente a los que poseen como extensión un \mathbb{Z} -subshift de tipo finito [17].

En lo que concierne a esta memoria, el problema que se trabaja en el capítulo 4 involucra demostrar que una clase de sistemas dinámicos posee una extensión que cumple la propiedad combinatorial de ser de tipo finito. Esto permite clasificar dichos sistemas y a su vez permite deducir propiedades sobre ellos.

Por su parte, la conjugación topológica al ser una relación de equivalencia permite tener una noción de cuando dos s.d.t. comparten sus propiedades dinámicas, es decir, se comportan como si fuesen el mismo sistema. En este sentido las conjugaciones permiten clasificar sistemas dinámicos y estudiarlos de manera abstracta, vale decir, no centrándose en las características específicas del sistema sino en propiedades generales de la clase a la que pertenece. Por ejemplo: dado (X, T) un s.d.t. con acción de un grupo G entonces es equivalente que X es un conjunto totalmente desconexo y T es una acción expansiva (ver [25]) a que (X, T) sea conjugado a un G -subshift. De esta manera propiedades dinámicas de (X, T) se pueden conocer simplemente estudiando la clase de los G -subshifts.

Definición 1.2 Sea (X, T) un s.d.t. con acción de un grupo G . Se define la órbita de un punto $x \in X$ como:

$$Orb_T(x) := \{T_g(x) \mid g \in G\}.$$

Definición 1.3 Sea (X, T) un sistema dinámico topológico donde X es un espacio métrico compacto. Diremos que:

1. (X, T) es transitivo si $\exists x \in X$ tal que $\overline{Orb_T(x)} = X$.
2. (X, T) es minimal si $\forall x \in X$ se cumple que $\overline{Orb_T(x)} = X$.

Los sistemas minimales son de especial importancia debido a son en cierta forma los átomos indivisibles de los sistemas dinámicos, es decir, no se pueden encontrar sistemas dinámicos más pequeños contenidos en ellos. A continuación se formaliza esto en un teorema.

Definición 1.4 Sea (X, T) un s.d.t. con acción de un grupo G . Se dice que un par (Y, T) donde $Y \subseteq X$ se denomina subsistema de (X, T) , si Y es cerrado y $\forall g \in G : T_g(Y) \subseteq Y$.

Teorema 1.5 Un s.d.t. (X, T) con acción de un grupo G es minimal si y solo si X no contiene ningún subconjunto propio y no vacío $Y \subseteq X$ tal que (Y, T) es un subsistema de (X, T) .

DEMOSTRACIÓN. Sea (X, T) minimal y supongamos por contradicción que existe $Y \subseteq X$ con

las propiedades enunciadas. Dado que Y no es vacío existe $y \in Y$ y como X es minimal se tiene que $\overline{Orb_T(y)} = X$. Utilizando que $\forall g \in G : T_g(Y) \subseteq Y$, tenemos que $Orb_T(y) \subseteq Y$, luego utilizando que Y es cerrado se concluye que $\overline{Orb_T(y)} \subseteq Y$. En consecuencia $X = Y$ lo cual contradice que Y sea propio.

Para la otra dirección, supóngase que (X, T) no posee subsistemas propios pero que existe $y \in X$ tal que $\overline{Orb_T(y)} \subsetneq X$. Notemos que definiendo $Y := \overline{Orb_T(y)}$ tenemos que:

1. Y es cerrado.
2. $Y \subsetneq X$, luego Y es propio.
3. $y \in Y$, luego Y es no vacío.

Lo cual contradice que (X, T) no posee subsistemas propios no vacíos. □

En virtud del teorema anterior, no es posible estudiar las propiedades dinámicas de un sistema minimal dividiéndolo en subsistemas cerrados no triviales, lo cual los hace interesantes desde el punto de vista dinámico. En esta memoria se utilizan bastante los sistemas minimales, en particular el capítulo 5 está dedicado a encontrar un ejemplo de un sistema minimal no trivial generado por una sustitución, es decir, uno que no consiste únicamente de una órbita finita.

Definición 1.6 Sea (X, T) un s.d.t. con acción de un grupo G y sea $H \leq G$ un subgrupo no trivial de G . Diremos que:

1. $x \in X$ es un punto H -periódico si $\forall h \in H : T_h(x) = x$.
2. $x \in X$ es un punto fijo si $\forall g \in G : T_g(x) = x$.

En particular, si para $x \in X$ existe $g \in G$ que no es el neutro tal que $T_g(x) = x$, entonces x es $\langle g \rangle$ -periódico (donde $\langle g \rangle := \{g^n | n \in \mathbb{Z}\}$) y en este caso se dice simplemente que x es un punto periódico.

1.2. Espacios de shift

Para el resto de la memoria se supondrá que G es un grupo numerable, abeliano y finitamente generado. En consecuencia, de este punto en adelante se empleará la notación aditiva de grupos.

Sea G un grupo y \mathcal{A} un alfabeto finito. Sea \mathcal{A}^G el conjunto de todas las funciones de G en \mathcal{A} junto con la acción $\sigma : G \times \mathcal{A}^G \rightarrow \mathcal{A}^G$ de modo tal que actúa en el elemento $x \in \mathcal{A}^G$ de la siguiente forma:

$$(\sigma_g(x))_h := x_{gh}.$$

Al conjunto \mathcal{A}^G se lo equipa de la topología producto, de ésta forma \mathcal{A}^G es un conjunto

compacto y los cilindros fundamentales $[a]_g := \{x \in \mathcal{A}^G \mid x_g = a\}$ para $a \in \mathcal{A}$ y $g \in G$ son conjuntos abiertos y cerrados que generan la topología. Si G es abeliano y finitamente generado se tiene además que \mathcal{A}^G es métrico compacto, y la convergencia es de la siguiente forma:

$$(x^{(m)})_{m \in \mathbb{N}} \rightarrow x \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{N}, \forall m \geq M : x^{(m)}|_{\Lambda_n} = x|_{\Lambda_n}.$$

Donde $\Lambda_n := \{g \in G \text{ tales que } |g|_G \leq n\}$ y $|g|_G$ es el menor número entero no negativo n tal que $g = n_1 g_1 + \dots + n_k g_k$ donde g_1, \dots, g_k son generadores de G y $\forall 1 \leq i \leq k: n_i \in \mathbb{Z}$ y $|n_i| \leq n$. La definición anterior obviamente depende del conjunto finito de generadores escogido, sin embargo la convergencia no cambia.

Definición 1.7 *Al sistema dinámico topológico (\mathcal{A}^G, σ) se lo denomina full G -shift sobre \mathcal{A} .*

Definición 1.8 *Sea \mathcal{A} un alfabeto finito y G un grupo numerable, abeliano y finitamente generado. Decimos que un subconjunto $X \subseteq \mathcal{A}^G$ cerrado y shift invariante ($\forall g \in G: \sigma_g(X) = X$) es un G -subshift sobre \mathcal{A} .*

De esta manera se tiene que $\sigma|_X : G \times X \rightarrow X$ el shift restringido a X constituye a $(X, \sigma|_X)$ como un s.d.t.

Cuando no exista confusión sobre cual es el grupo o el alfabeto o bien no sea relevante para la afirmación, se dirá simplemente que X es un subshift.

Los subshifts corresponden a una clase ampliamente estudiada de sistemas dinámicos, en particular el caso de los \mathbb{Z} -subshifts es el más minuciosamente desarrollado y gran parte de la teoría puede encontrarse en [17]. Una de las razones de su importancia es que permiten simplificar el estudio de sistemas dinámicos topológicos, es decir, dado un s.d.t. (Y, T) con acción de un grupo G abeliano se considera una partición finita de Y y se le asigna a cada una de las partes un símbolo de un alfabeto finito \mathcal{A} . Luego es posible definir un subshift que consiste de todos los puntos x en \mathcal{A}^G tales que existe $y \in Y$ de modo que x_g es el símbolo asociado a la partición en la que cae $T_g(y)$. De esta forma es posible estudiar propiedades de sistemas complejos tan solo mirando algún subshift definido de la forma anterior. Más aún, si la partición de Y fue tomada de modo tal que cumpla alguna propiedad especial como que la partición sea un generador topológico (ver [25]) se puede lograr que el sistema simbólico generado de la manera anterior sea conjugado al sistema original, o que al menos sea un factor no tan lejano de (Y, T) .

Otra de las razones que hacen de los subshifts un tópico interesante es que pueden ser definidos de un modo completamente combinatorial. A continuación se muestra una definición alternativa de estos objetos utilizando solo conceptos de dicho ámbito.

Definición 1.9 *Sea \mathcal{A} un alfabeto finito y G un grupo abeliano, numerable y finitamente generado. Se define el conjunto de los patrones finitos sobre \mathcal{A} como:*

$$\mathcal{A}^* := \bigcup_{\substack{S \subseteq G \\ S \text{ finito}}} \mathcal{A}^S.$$

A un elemento $P \in \mathcal{A}^*$ tal que $P \in \mathcal{A}^S$ con $S \subseteq G$ finito se lo denominará patrón de forma

S . También se dice que S es el soporte de P . En el caso en que $G = \mathbb{Z}$ a los elementos de \mathcal{A}^* cuyo soporte sea conexo se los denomina palabras.

Definición 1.10 Sea $P \in \mathcal{A}^S$ con $S \subsetneq G$ finito y X un G -subshift. Denotamos por $[P]_g := \{x \in X : x|_{g+S} = P\}$ al cilindro abierto y cerrado dado por el patrón P en la posición g .

Definición 1.11 Sean $P \in \mathcal{A}^{S_1}$ y $Q \in \mathcal{A}^{S_2}$ dos patrones sobre un grupo abeliano, numerable y finitamente generado G . Decimos que P es subpatrón de Q ($P \sqsubseteq Q$) si y sólo si existe $g \in G$ tal que $g + S_1 \subseteq S_2 \wedge P = Q|_{g+S_1}$. Además si X es un G -subshift se dirá que $P \sqsubseteq x$ si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $P \sqsubseteq x|_{\Lambda_n}$.

Definición 1.12 Sea X un G -subshift, se define el lenguaje de X como:

$$\mathcal{L}(X) := \{P \in \mathcal{A}^* \mid \exists x \in X : P \sqsubseteq x\} = \bigcup_{\substack{S \subsetneq G \\ S \text{ finito}}} \mathcal{L}_S(X),$$

donde

$$\mathcal{L}_S(X) := \{P \in \mathcal{A}^S \mid \exists x \in X : P \sqsubseteq x\}.$$

Para $S \subsetneq G$ finito y X un G -subshift se denominará a los elementos de $\mathcal{L}_S(X)$ patrones globalmente admisibles de forma S .

A continuación se enuncia un teorema que caracteriza los G -subshifts como los subconjuntos del full G -shift que están definidos por un conjunto \mathcal{F} de patrones prohibidas. Una demostración para el caso particular en que el grupo G corresponde a \mathbb{Z} puede encontrarse en [17].

Teorema 1.13 Sea G un grupo abeliano, numerable y finitamente generado. Un conjunto $X \subseteq \mathcal{A}^G$ es un G -subshift si y solamente si existe $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}^*$ tal que $X = X_{\mathcal{F}} := \{x \in \mathcal{A}^G \mid \forall g \in G, S \subsetneq G, S \text{ finito} : x|_{g+S} \notin \mathcal{F}\}$.

DEMOSTRACIÓN. La demostración es muy parecida a la del caso unidimensional ($G = \mathbb{Z}$). Si existe $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}^*$ tal que $X = X_{\mathcal{F}}$ entonces es evidente que X es shift invariante pues $\forall g \in G$ se tiene que $x \in X_{\mathcal{F}} \Leftrightarrow \sigma_g(x) \in X_{\mathcal{F}}$. También se tiene que X es cerrado pues su complemento

$$X_{\mathcal{F}}^c = \bigcup_{g \in G} \bigcup_{P \in \mathcal{F}} [P]_g,$$

es abierto.

Por otro lado, si X es un G -subshift, entonces como X es cerrado se tiene que X^c es abierto, luego en virtud de que la topología es la generada por los cilindros se puede escribir:

$$X^c = \bigcup_{i \in I} [P_i]_{g_i},$$

donde I es un conjunto a lo más numerable y $\forall i \in I: P_i \in \mathcal{A}^*$ y $g_i \in G$. Luego considerando $\mathcal{F} := \{P_i \mid i \in I\}$ se tiene que $X = X_{\mathcal{F}}$. En efecto, si $x \in X_{\mathcal{F}}$ claramente $x \notin X^c$. Supongamos

que $x \in X$ pero $x \notin X_{\mathcal{F}}$, luego existe $i \in I$, $g \in G$ y $S \subsetneq G$ finito tal que $x_{g+S} = P_i$, es decir $x \in [P_i]_g$, luego $\sigma_{g-g_i}(x) \in [P_i]_{g_i}$, de este modo se concluye que $\sigma_{g-g_i}(x) \notin X$ lo cual contradice que X es shift invariante. □

Definición 1.14 Sea (X, σ) un G -subshift sobre \mathcal{A} , y sea $\tilde{\mathcal{A}}$ otro alfabeto finito. Diremos que una función $\phi : X \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}^G$ es un código de la ventana deslizante (c.v.d.) si existe $S \subsetneq G$ un subconjunto finito y una función local $\Phi : \mathcal{L}_S(X) \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$ tal que $\forall g \in G (\phi(x))_g = \Phi(x_{g+S})$.

También diremos que un código de la ventana deslizante ϕ es inducido por Φ , si Φ es la función local de la definición anterior. Esto se escribe como $\phi = \Phi_{\infty}$. Al conjunto S tal que Φ está definido sobre $\mathcal{L}_S(X)$ se le denomina conjunto de memoria. Si $S = \{0\}$, es decir, la función Φ está definida sobre $\mathcal{L}_{\{0\}}(X) \subseteq \mathcal{A}$, diremos que $\phi = \Phi_{\infty}$ es un código 1-bloque.

El teorema de Curtis-Hedlund-Lyndon permite caracterizar las funciones continuas que conmutan con el shift mediante códigos de la ventana deslizante. En particular los factores, encajes y conjugaciones son códigos de la ventana deslizante.

Teorema 1.15 (Curtis-Hedlund-Lyndon) Sean (X, σ_X) e (Y, σ_Y) dos subshifts y sea $\phi : (X, \sigma_X) \rightarrow (Y, \sigma_Y)$ una función. Entonces ϕ es continua y conmuta con los shift ($\phi \circ \sigma_X = \sigma_Y \circ \phi$) si y sólo si ϕ es un código de la ventana deslizante.

DEMOSTRACIÓN. Una demostración para el caso en que el grupo G es \mathbb{Z} se puede encontrar en [17]. Para el caso general de un grupo G abeliano, numerable y finitamente generado la demostración es muy parecida. Por un lado es evidente que los códigos de la ventana deslizante son continuos y conmutan los shifts, para la afirmación contraria, simplemente se utiliza que toda función continua en un espacio compacto es uniformemente continua y en función de ello se tiene que para todo $x, y \in X$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x|_{\Lambda_n} = y|_{\Lambda_n}$ implica que $\phi(x)_0 = \phi(y)_0$. De este modo se puede definir de manera consistente una función local Φ con memoria Λ_n que cumpla que $\forall x \in X : \Phi(x|_{\Lambda_n}) = \phi(x)_0$ y así utilizando que ϕ conmuta los shifts se tiene que $\phi = \Phi_{\infty}$. □

En primer lugar el teorema da una descripción local de las funciones que son dinámicamente interesantes, es decir, las que preservan propiedades dinámicas entre los subshifts. De esta manera permite trabajar de forma correcta conociendo exactamente la estructura de dichas funciones. En este sentido la importancia del teorema anterior es que permite restringir el estudio de los problemas de conjugación y factores simplemente al de existencia de c.v.d. los cuales pueden ser definidos con una cantidad finita de información. De hecho lo anterior tiene gran relevancia para la computación, ya que implica que dichas funciones pueden ser codificadas en un computador, más aún, si sólo nos interesa estudiar una propiedad invariante bajo conjugación la siguiente proposición permite restringirse al caso donde los códigos son 1-bloque, es decir, tan solo basta definir una función entre alfabetos finitos.

Proposición 1.16 Sean X, Y subshifts y $\phi : X \rightarrow Y$ un c.v.d. Entonces existe una conju-

gación $\psi : X \rightarrow \tilde{X}$ y un c.v.d. 1-bloque $\tilde{\phi} : \tilde{X} \rightarrow Y$ tal que $\phi = \tilde{\phi} \circ \psi$.

En efecto, la conjugación ψ descrita en la proposición anterior corresponde a un código N -higher bloque, es decir, un código $\beta_N : X \rightarrow \tilde{X}$ tal que $\beta_N(x)_g := x_{g+\Lambda_N}$ elegido de modo tal que el conjunto de memoria S de ϕ esté contenido en Λ_N . A la imagen $\beta_N(X)$ se la denotará $X^{[N]}$. Diremos que $X^{[N]} \subseteq (\mathcal{A}^{\Lambda_N})^G$ es la representación N -higher bloque de X .

Definición 1.17 Sea $X \subseteq \mathcal{A}^G$ un G -subshift con alfabeto \mathcal{A} y $H \leq G$ un subgrupo de índice finito, es decir $[G : H] < \infty$, sea además F un sistema de clases laterales de G/H . Se define el F -higher power shift X^F como:

$$X^F := \{y \in (\mathcal{A}^F)^H \mid \exists x \in X \forall h \in H : y_h = x_{h+F}\}.$$

Se tiene que X^F es un H -subshift sobre el alfabeto \mathcal{A}^F . En el caso de que el grupo G coincida con \mathbb{Z}^d y el subgrupo H sea un látice de la forma $(k\mathbb{Z})^d$ con $k \in \mathbb{N}$ se tiene que un sistema de clases laterales canónico es el hipercubo de lado k , $F := \{1, \dots, k\}^d$. En este caso al F -higher power shift lo denotaremos $X^{\{k\}}$ y lo denominaremos el k -higher power shift de X .

Este objeto será de gran utilidad en las demostraciones del capítulo 4, dado que permitirá extraer de un subshift la información que se ubica en un $(2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z})$ -látice de él y de este modo construir un nuevo subshift sobre el cual se puede trabajar de manera apropiada.

1.3. Subshifts de tipo finito

La clase de subshifts de tipo finito es una de las más importantes de la teoría. Su relevancia radica en que corresponde a una clase de subshifts que pueden ser definidos combinatorialmente mediante un conjunto finito de patrones prohibidos, en consecuencia es factible tratarlos desde un punto de vista computacional y en algunos casos (por ejemplo, para \mathbb{Z} -subshifts de tipo finito) dar solución en forma de un algoritmo a preguntas sobre propiedades dinámicas del sistema tales como el tamaño de alguna órbita finita, determinar si un patrón es globalmente admisible o simplemente si el subshift definido por la lista de palabras es vacío.

A continuación se definen los subshifts de tipo finito y se entrega una breve reseña de algunas características de dichos sistemas en el caso unidimensional (es decir, cuando el grupo G es \mathbb{Z}). Posteriormente se hablará del caso multidimensional, vale decir, cuando $G = \mathbb{Z}^d$ y se entregarán algunos conceptos que serán útiles para el desarrollo de los siguientes capítulos de este trabajo.

Definición 1.18 Sea $X \subseteq \mathcal{A}^G$ un G -subshift sobre \mathcal{A} . Si existe $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}^*$ finito tal que $X = X_{\mathcal{F}}$ se dirá que X es un subshift de tipo finito (SFT).

Ejemplo Sea $X \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ el \mathbb{Z} -SFT definido por la lista de palabras prohibidas $\mathcal{F} := \{11\}$, es decir $X = X_{\mathcal{F}}$. X se denomina shift de Fibonacci y corresponde a todas las secuencias bi-infinitas que no tienen dos veces el símbolo 1 en posiciones consecutivas.

Teorema 1.19 Sean X, Y G -subshifts tal que $X \simeq Y$ y X es de tipo finito, entonces Y es de tipo finito.

El teorema anterior indica que la propiedad de ser SFT se preserva bajo conjugación, es decir, aunque su definición sea puramente combinatorial la propiedad es realmente una característica dinámica de los subshifts. En particular los códigos higher bloque β_N con $N \in \mathbb{N}$ preservan la propiedad de ser SFT.

Otra razón de la importancia de esta clase de subshifts es su estabilidad bajo operaciones usuales, por ejemplo:

Proposición 1.20 Sea G un grupo abeliano, numerable y finitamente generado y X, Y G -subshifts tal que X e Y son de tipo finito, entonces:

1. $X \cap Y$ es de tipo finito.
2. $X \times Y$ es de tipo finito.
3. Para $H \leq G$ un subgrupo de índice finito y F un sistema de clases laterales entonces X^F el F -higher power shift de X es un subshift de tipo finito.

Es importante destacar que la propiedad de ser SFT no se preserva bajo factores, y que la unión de dos SFT no necesariamente es SFT. El hecho de que un factor de un SFT también puede ser descrito con una cantidad finita de información (la lista finita de patrones prohibidos y la función local Φ que define el código factor de acuerdo a 1.15) harán necesario extender la clase de shifts de tipo finito a la clase de los shifts sóficos que es definida en la siguiente sección.

En el caso en que el grupo G corresponde a \mathbb{Z} , los G -subshifts de tipo finito están bastante estudiados y se tienen caracterizaciones interesantes, por ejemplo, se sabe que todo \mathbb{Z} -SFT es conjugado a un shift de arcos. A continuación en 1.21 se definen dichos objetos.

Definición 1.21 Sea $G = (V, E, i, t)$ un digrafo finito donde V es el conjunto de vértices, E el conjunto de arcos y $i, t : E \rightarrow V$ son las funciones que a cada arco le asignan su vértice inicial y de término respectivamente. Se define un \mathbb{Z} -subshift al cual llamamos el shift de arcos

$$X_G := \{x \in E^{\mathbb{Z}} \mid \forall j \in \mathbb{Z} : t(x_j) = i(x_{j+1})\}.$$

También todo shift de arcos es un \mathbb{Z} -SFT, de este modo se pueden estudiar los \mathbb{Z} -SFT como los conjuntos de caminos bi-infinitos de arcos en un digrafo finito. Se puede encontrar bastante información sobre la teoría de \mathbb{Z} -SFT en el libro [17].

La representación anterior mediante shifts de arcos muestra que muchas propiedades dinámicas de los \mathbb{Z} -SFT son decidibles, dado que se reducen a ejecutar un algoritmo en un digrafo finito. Por ejemplo: para decidir si un \mathbb{Z} -SFT es no vacío basta considerar su representación como shift de arcos y decidir si en el grafo hay algún ciclo dirigido.

Por otro parte, el caso de los \mathbb{Z}^d -SFT con $d > 1$ es mucho más complejo. Por ejemplo: el problema de determinar si dado un conjunto finito \mathcal{F} de patrones prohibidos el \mathbb{Z}^d -SFT

$X_{\mathcal{F}}$ es vacío es indecidible. También es indecidible determinar si un patrón es globalmente admisible, o si un \mathbb{Z}^d -SFT contiene puntos periódicos.

Un caso que expone este aumento en complejidad es el de los SFT minimales. Los \mathbb{Z} -SFT minimales necesariamente son los que consisten de una única órbita finita, en cambio para $d > 1$ existen \mathbb{Z}^d -SFT minimales cuya cardinalidad es no numerable. Se expone un ejemplo de este caso en la última sección del capítulo 3.

Los tópicos que se estudian en esta memoria conciernen la teoría de \mathbb{Z}^d -subshifts con $d > 1$, principalmente el caso $d = 2$. Para estudiar estos subshifts es necesario antes hacer algunas definiciones.

Definición 1.22 *Una lista finita de patrones prohibidos \mathcal{F} sobre el grupo \mathbb{Z}^d se dirá nearest neighbor si todos los patrones prohibidos tienen forma $\{0, e_i\}$ donde $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ es el generador canónico de \mathbb{Z}^d , es decir e_i es el elemento de \mathbb{Z}^d que tiene un 1 en la coordenada i y un 0 en el resto. Un \mathbb{Z}^d -subshift X se dirá nearest neighbor si puede ser definido por un conjunto \mathcal{F} nearest neighbor.*

En el caso unidimensional los \mathbb{Z} -SFT nearest neighbor son los que pueden ser definidos por una lista de palabras \mathcal{F} tal que el largo de cada palabra prohibida en \mathcal{F} es 2. Un ejemplo corresponde al subshift de Fibonacci descrito al comienzo de esta sección.

Si $d = 2$, los \mathbb{Z}^2 -subshifts nearest neighbor son los que poseen un conjunto de patrones prohibidos \mathcal{F} tal que cada elemento de \mathcal{F} es de la forma ab o $\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}$ con $a, b \in \mathcal{A}$ el alfabeto.

Proposición 1.23 *Sea $d \geq 1$. Todo \mathbb{Z}^d -SFT X es conjugado a un \mathbb{Z}^d -SFT \tilde{X} tal que \tilde{X} es nearest neighbor.*

DEMOSTRACIÓN. Sea \mathcal{F} finito tal que $X = X_{\mathcal{F}}$. Para demostrar la proposición anterior, basta tomar $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que el soporte de todo patrón $P \in \mathcal{F}$ esté contenido en Λ_N y se toma $\tilde{X} := \beta_N(X)$ la representación N -higher bloque. De este modo el conjunto de patrones prohibidos de \tilde{X} queda de la forma descrita en 1.22.

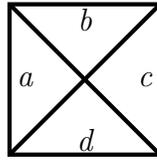
□

Una de las dificultades al momento de presentar ejemplos de \mathbb{Z}^2 -SFT complicados es lo tedioso que puede ser describir la lista de patrones prohibidos. La proposición anterior nos asegura que podemos encontrar una versión conjugada que es nearest neighbor. Si bien esto simplifica bastante la definición del conjunto de patrones prohibidos, paga el precio de aumentar el tamaño del alfabeto.

En el caso de \mathbb{Z}^2 -SFT existe una forma sencilla de representación mediante baldosas de Wang. Esta es una representación nearest neighbor en la cual el conjunto de patrones prohibidos queda definido de manera implícita, y tan solo es necesario dar una descripción del alfabeto.

Definición 1.24 *Un \mathbb{Z}^2 -SFT nearest neighbor $X = X_{\mathcal{F}}$ sobre un alfabeto \mathcal{A} se denomina*

embaldosado de Wang si los elementos de \mathcal{A} son baldosas de la forma:



Donde a, b, c, d son colores dentro de un conjunto finito y el conjunto de patrones prohibidos \mathcal{F} nearest neighbor es tal que se prohíbe tener dos baldosas adyacentes si y sólo si los colores del borde en el cual se unen son distintos.

De esta manera un embaldosado de Wang consiste de todos los puntos en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ de modo tal que cada par de baldosas adyacentes calzan correctamente en el borde que comparten. Lo anterior permite una interpretación geométrica de los \mathbb{Z}^2 -SFT nearest neighbor como un $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ -látice de cuadrados de lado 1 cuyas aristas están pintadas y dos cuadrados adyacentes deben tener el mismo color en la arista que comparten. De la misma forma es posible extender esto a dimensiones más altas utilizando hipercubos, sin embargo ya no es posible representarlo gráficamente de manera sencilla.

Ejemplo El embaldosado de Wang dado por el alfabeto:

$$\mathcal{A} := \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline \diagdown & \diagup \\ \hline 0 & 1 \\ \hline & 0 \\ \hline \end{array} , \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & \\ \hline \diagdown & \diagup \\ \hline 1 & 0 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \right\} .$$

Corresponde a una órbita finita con dos elementos. Esto es debido a que cada una de las baldosas descritas en \mathcal{A} tan solo puede ser adyacente a la baldosa distinta en cada dirección, de este modo fijando la baldosa de la posición $(0,0)$, entonces necesariamente las baldosas de las cuatro posiciones adyacentes están determinadas y corresponden a la otra baldosa. Iterando este argumento se concluye que la baldosa de la posición $(0,0)$ determina el punto completamente.

De esta manera el embaldosado de Wang dado por \mathcal{A} corresponde a una tabla de ajedrez, es decir, consiste únicamente de una órbita con dos puntos H -periódicos, donde $H \leq \mathbb{Z}^2$ es el subgrupo de \mathbb{Z}^2 generado por los elementos $\{(0, 2), (2, 0), (1, 1)\}$. Si pintamos una de las baldosas de color blanco y la otra de color negro tenemos que todos los puntos se extienden infinitamente repitiendo localmente el patrón que se muestra en la figura 1.1.

1.4. Subshifts de tipo sófico

En esta sección se estudian algunas propiedades de los subshifts sóficos, los cuales son una generalización de los SFT. En la sección anterior se dijo que la propiedad de ser un subshift de tipo finito no necesariamente se preserva bajo factores, pero que sin embargo el factor

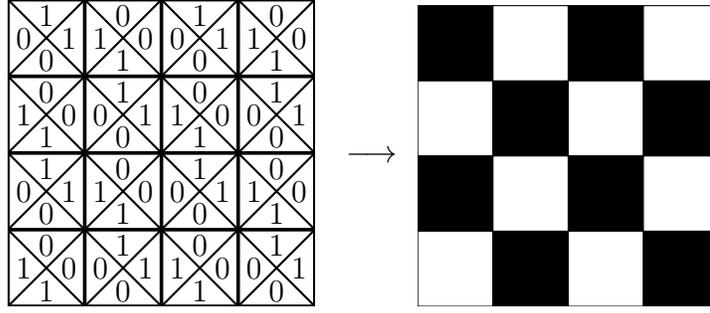


Figura 1.1: Un embaledado de Wang cuyos puntos corresponden a un tablero de ajedrez infinito.

de un SFT puede ser descrito con una cantidad finita de información. Lo anterior motiva la siguiente definición:

Definición 1.25 Sea $S \subseteq \mathcal{A}^G$ un G -subshift sobre el alfabeto finito \mathcal{A} . Si existe X un G -SFT y un código factor $\phi : X \rightarrow S$ se dirá que S es un G -subshift (de tipo) sófico.

La clase de G -subshifts de tipo sófico es la clase más pequeña de G -subshifts que contiene a los G -SFT y además es cerrada bajo factores. En particular eso implica que al igual que en el caso de los SFT, la propiedad de ser de tipo sófico se preserva bajo conjugación.

La propiedad de ser sófico, además de preservarse para los casos detallados en 1.20, también se preserva para la unión finita de subshifts de tipo sófico.

Al igual que en el caso de los SFT, el caso unidimensional donde $G = \mathbb{Z}$ está ampliamente estudiado y se sabe que todo \mathbb{Z} -subshift sófico se puede representar mediante un digrafo etiquetado. A continuación en 1.26 se precisa que es ese objeto.

Definición 1.26 Sea $\mathcal{G} = (G, \mathcal{L})$ un digrafo finito etiquetado, es decir, un par ordenado donde el primer elemento es un digrafo finito $G = (V, E, i, t)$ y el segundo es una función de etiquetas $\mathcal{L} : E \rightarrow \mathcal{A}$ donde \mathcal{A} es un alfabeto finito. Se define un \mathbb{Z} -subshift

$$X_{\mathcal{G}} := \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \mid \exists y \in X_G, \forall j \in \mathbb{Z} : x_j = \mathcal{L}(y_j)\} = \{\mathcal{L}_{\infty}(y) \mid y \in X_G\}.$$

Definición 1.27 Sea L un lenguaje unidimensional, es decir, si \mathcal{A} es un alfabeto finito entonces $L \subseteq \mathcal{A}^*$, donde $\mathcal{A}^* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{A}^n$. Decimos que:

1. L es regular si existe un autómata finito determinista que reconoce a L (ver [1] o [24]).
2. L es extensible si para cada palabra $w \in L$ existen símbolos $u, v \in \mathcal{A}$ tal que la palabra extendida por concatenación $uwv \in L$.
3. L es factorial si para todo $u, w \in \mathcal{A}^*$ tales que $u \sqsubseteq w$ se cumple que $w \in L \Rightarrow u \in L$.

Están totalmente caracterizados los lenguajes $\mathcal{L}(S)$ donde S es un \mathbb{Z} -subshift de tipo sófico como los lenguajes regulares, extensibles y factoriales. También es posible representar los \mathbb{Z} -subshift sóficos mediante un semigrupo multiplicativo o bien mediante conjuntos de sucesores. Al igual que en el caso de los \mathbb{Z} -SFT una buena referencia para las propiedades

anteriores es [17].

El caso multidimensional, es decir, el de los \mathbb{Z}^d -subshifts sóficos con $d > 1$ es al igual que en los \mathbb{Z}^d -SFT mucho más complejo que el unidimensional. De hecho por el momento no se tiene ninguna caracterización de los \mathbb{Z}^d -subshifts de tipo sófico, salvo por la definición de ser factor de algún \mathbb{Z}^d -SFT. Esto dificulta bastante las demostraciones, dado que se debe mostrar la existencia de una extensión SFT, la cual en muchos casos debe construirse explícitamente. En el capítulo 4 de esta memoria se construirá de manera explícita una extensión para mostrar que un \mathbb{Z}^2 -subshift es de tipo sófico.

Capítulo 2

Sustituciones

El objetivo de este capítulo consiste en establecer las definiciones básicas y enunciar algunos teoremas importantes de la teoría de sustituciones y los sistemas dinámicos que son generados por ellas. El trabajo expuesto en el capítulo 4 entrega una versión alternativa de un teorema importante que es expuesto en la última sección de este capítulo, en tanto en el capítulo 5 se entregará un ejemplo de un \mathbb{Z}^2 -SFT que cumple algunas propiedades interesantes y que es generado por una sustitución. A lo largo de este capítulo se entregarán las definiciones y teoremas necesarios para poder desarrollar las demostraciones en dichos capítulos.

A grandes rasgos una sustitución es una regla que a cada elemento en un conjunto le asigna una colección de elementos que se encuentran ordenados espacialmente y sobre cada uno de los cuales se puede iterar la regla de sustitución de manera indefinida. El concepto anteriormente presentado es muy amplio y puede ser aplicado en diversos contextos. Para los efectos de esta memoria utilizaremos solo una interpretación simbólica de las sustituciones, sin embargo el ejemplo siguiente muestra que el concepto puede ser utilizado en el contexto geométrico.

Ejemplo Sea r la regla que sustituye un segmento en \mathbb{R}^2 por cuatro segmentos cuyo largo es $1/3$ del largo del segmento original y que se ordenan en el plano de la forma en que se muestra en la figura 2.1:



Figura 2.1: La regla que genera el copo de nieve de Koch.

La iteración sucesiva de la sustitución r sobre los segmentos de un triángulo equilátero en \mathbb{R}^2 produce en el límite una figura autosimilar conocida como el copo de nieve de Koch [15].

En el contexto de lo que respecta a esta memoria, consideraremos solo sustituciones combinatoriales, es decir, el conjunto de elementos sobre los cuales está definida la sustitución es finito y el espacio en el cual se ordena la imagen de ese elemento es un grupo abeliano, numerable y finitamente generado. En particular, solo se estudia el caso donde el grupo es

\mathbb{Z}^d para $d \in \mathbb{N}$.

Las sustituciones combinatoriales son de especial importancia a la teoría de sistemas dinámicos ya que permiten generar sistemas dinámicos de baja complejidad. Esto traducido al contexto donde el grupo es \mathbb{Z}^d con $d \in \mathbb{N}$, significa que dichas sustituciones permiten generar \mathbb{Z}^d -subshifts X tales que para $n \in \mathbb{N}$ el número $\log |\mathcal{L}_{\Lambda_n}(X)|$ es $o(n^d)$. Esta afirmación por si sola no es interesante dado que es sencillo construir sistemas de baja complejidad (por ejemplo, sistemas que consisten de una única órbita finita), sin embargo, si se exige que las sustituciones cumplan algunas propiedades combinatoriales simples se pueden generar características interesantes como la minimalidad y la ausencia de puntos periódicos en los subshifts generados por dichas sustituciones. Es decir, las sustituciones permiten generar sistemas dinámicos de baja complejidad y que cumplen propiedades dinámicas interesantes. Otra razón de la importancia de las sustituciones combinatoriales en la teoría de sistemas dinámicos radica en que dadas algunas condiciones de consistencia, las reglas de sustitución pueden extenderse mediante concatenación desde funciones sobre un alfabeto finito $s : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$ a funciones sobre todo $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$, es decir $s : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$. De este modo se generan sistemas dinámicos cuyo espacio es $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ pero cuya acción no es el shift sino que la sustitución s .

En la primera sección de este capítulo se estudian algunos conceptos básicos en el caso de las sustituciones unidimensionales, es decir, donde el grupo en el cual se ordenan los elementos de la imagen de la sustitución es \mathbb{Z} . A continuación se analiza el caso multidimensional, con especial atención al caso bidimensional. Finalmente se concluye el capítulo hablando del teorema de Mozes y sus alcances y limitaciones.

2.1. Sustituciones unidimensionales

Las sustituciones unidimensionales son funciones que toman símbolos en un alfabeto finito \mathcal{A} y los reemplazan por palabras no vacías en \mathcal{A}^* . Al igual que en el caso de los \mathbb{Z} -subshifts, la teoría está ampliamente desarrollada en el caso de las sustituciones unidimensionales. Gran parte de ésta teoría se puede encontrar en [6].

Una de las razones de este gran desarrollo de teoría en el caso unidimensional reside en el hecho de que las sustituciones unidimensionales son más sencillas al no presentar problemas al momento de extenderse mediante concatenación. En la sección siguiente se muestra como ya en el caso de sustituciones bidimensionales la extensión de la función de sustitución a patrones puede presentar dificultades.

En esta sección se darán las definiciones básicas sobre sustituciones unidimensionales. En la sección siguiente se estudiarán en mayor detalle los sistemas generados por ellas.

Definición 2.1 *Sea \mathcal{A} un alfabeto finito, y sea \mathcal{A}^* el conjunto de las palabras finitas unidimensionales, es decir $\mathcal{A}^* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{A}^n$. Una sustitución unidimensional es una función s desde \mathcal{A} al conjunto de palabras no vacías, vale decir $s : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^* \setminus \{\varepsilon\}$.*

La función s se extiende mediante concatenación a una función de \mathcal{A}^* , es decir, si $w \in \mathcal{A}^*$

es de la forma $w = w_1 \dots w_n \in \mathcal{A}^n$ entonces $s(w) := s(w_1) \dots s(w_n)$.

También se extiende la función s a una función $s : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ de la siguiente forma: sea $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ tal que $x = \dots x_{-2}x_{-1}.x_0x_1x_2 \dots$ entonces $s(x) := \dots s(x_{-2})s(x_{-1}).s(x_0)s(x_1)s(x_2) \dots$ donde el punto indica que a continuación va la coordenada 0.

Una sustitución unidimensional s codifica una regla que se puede aplicar iterativamente a un símbolo de \mathcal{A} para formar en el límite secuencias infinitas bajo algunas condiciones, como que la imagen de cada elemento del alfabeto tenga largo ≥ 2 . De este modo usando la compacidad de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ se puede asegurar que $\forall a \in \mathcal{A}$ existe una subsecuencia de $(s^n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} s^{n_k}(a) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$.

Ejemplo Consideremos la sustitución s sobre el alfabeto $\mathcal{A} := \{0, 1\}$ tal que $s(0) := 01$ y $s(1) := 10$, de este modo al aplicar s iterativamente al símbolo 0 obtenemos:

$$0 \rightarrow 01 \rightarrow 0110 \rightarrow 01101001 \rightarrow 0110100110010110 \rightarrow \dots$$

Esta sustitución se denomina sustitución de Thue-Morse.

La construcción de subshifts mediante sustituciones es tratada de manera general en la sección sobre sustituciones multidimensionales, sin embargo se ha optado por incluir este pequeño apartado al caso unidimensional en primer lugar para mostrar que en este caso es sencillo extender una sustitución mediante concatenación al conjunto de palabras finitas, y también para posteriormente en la última sección de este capítulo poder hacer notar algunas diferencias fundamentales entre los sistemas generados por sustituciones entre el caso unidimensional y el caso bidimensional.

2.2. Sustituciones multidimensionales

Definición 2.2 Sea $d \in \mathbb{N}$ y \mathcal{A} un alfabeto finito, y \mathcal{A}^* el conjunto de los patrones d -dimensionales, es decir $\mathcal{A}^* := \bigcup_{\substack{S \subseteq \mathbb{Z}^d \\ S \text{ finito}}} \mathcal{A}^S$. Una sustitución es una función $s : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^* \setminus \{\varepsilon\}$. Se dice también que la sustitución s es sobre \mathbb{Z}^d , o que s es una \mathbb{Z}^d -sustitución.

A diferencia del caso unidimensional en el cual es evidente como extender la función s para actuar en una palabra mediante concatenación, acá es posible que la función s no sea tan sencilla de extender a patrones arbitrarios. Obviamente en este caso es necesario entregar algún tipo de información adicional que indique de que manera se organiza la imagen de un patrón. Una forma natural de hacer esto es definir la imagen de dos símbolos que se encuentren adyacentes espacialmente en \mathbb{Z}^d , sin embargo esa forma de atacar el problema presenta los siguientes problemas (se pueden encontrar más detalles en [12]):

1. Es posible que la concatenación no sea consistente, es decir, dado un patrón, es posible que la imagen de éste dependa del orden en que se ejecuten las sustituciones de sus símbolos

2. Es posible que la concatenación se superponga de manera inconsistente, es decir, que al sustituir un patrón existan dos símbolos tal que la forma de sus patrones se intersecta y cada uno de esos patrones tiene un símbolo distinto en alguna posición de la intersección.

Una teoría general que se encarga de ese caso incluye reglas de se puede encontrar en [12]. También se puede encontrar información sobre este tipo de sustituciones generales en [8]. Aún con esta teoría, los resultados son negativos, dado que se muestra en [12] que los problemas de determinar consistencia o que no hay superposición son indecidibles.

Esta memoria se restringe a un caso más sencillo, se limita la forma posible de las imágenes de s de modo que sean conjuntos para los cuales definir la concatenación sea sencillo. Un conjunto $R \subseteq \mathbb{Z}^d$ se denomina un rectángulo si existen $l_1, \dots, l_d \in \mathbb{N}$ tal que $\forall 1 \leq i \leq d, l_i \geq 2$ y se tiene que $R = R[l_1, \dots, l_d] := \{z \in \mathbb{Z}^d | \forall 1 \leq i \leq d, 1 \leq z_i \leq l_i\}$.

Definición 2.3 Una sustitución s sobre \mathbb{Z}^d se dice rectangular si existe un rectángulo $R := R[l_1, \dots, l_d]$ tal que $s(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}^R$. En tal caso se dice que la sustitución es de tamaño (l_1, \dots, l_d) .

Definición 2.4 Una sustitución s sobre \mathbb{Z}^d se dice cuadrada si existe un rectángulo $R := R[l, \dots, l]$ tal que $s(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}^R$. En tal caso se dice que la sustitución cuadrada es de tamaño l .

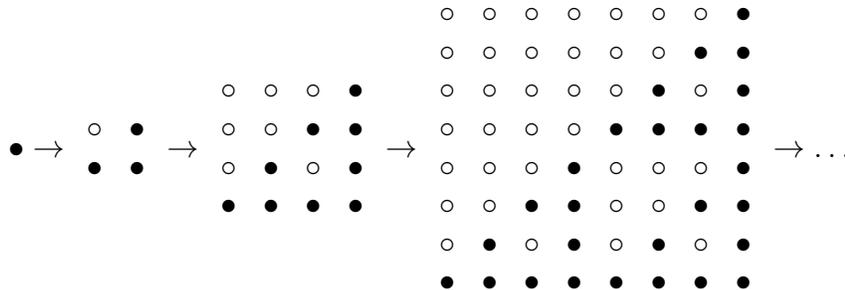
Para sustituciones rectangulares es sencillo extender la función s a todo \mathcal{A}^* mediante concatenación. Más aún, es posible extender s a un mapeo sobre $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ de la siguiente forma:

Sea s una sustitución rectangular de tamaño (l_1, \dots, l_d) . Definimos una aplicación lineal L de modo tal que actúa en los generadores canónicos $(e_j)_{1 \leq j \leq d}$ de \mathbb{Z}^d mediante $L(e_j) := e_j l_j$. De ésta forma para cada $z \in \mathbb{Z}^d$ existe un único $w \in \mathbb{Z}^d$ y $k \in R[l_1, \dots, l_d]$ de modo tal que $z = L(w) + k$. Utilizando lo anterior, se puede extender s a un mapeo de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ de modo tal que para $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ y $z \in \mathbb{Z}^d$ escrito de la forma $z = L(w) + k$ entonces $s(x)_z := (s(x_w))_k$.

Ejemplo $\mathcal{A} := \{\circ, \bullet\}$, y s sustitución cuadrada sobre \mathbb{Z}^2 dada por las reglas:

$$\circ \rightarrow \begin{array}{cc} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{array}, \quad \bullet \rightarrow \begin{array}{cc} \circ & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{array}.$$

Si se aplica la sustitución s iterativamente se obtienen los siguientes patrones que van generando el triángulo de Sierpinski.



A continuación se construyen sistemas dinámicos a partir de sustituciones. Una de las

construcciones es puramente combinatorial y genera un \mathbb{Z}^d -subshift utilizando un conjunto de patrones prohibidos que proviene de la sustitución. El otro enfoque construye un sistema dinámico utilizando la sustitución y posteriormente genera un \mathbb{Z}^d -subshift a partir de él. Para realizar dichas construcciones es necesario antes introducir algunos conceptos previos.

Definición 2.5 *Sea s una sustitución multidimensional sobre un alfabeto finito \mathcal{A} . Se define el lenguaje de s de la siguiente forma:*

$$\mathcal{L}(s) := \{P \in \mathcal{A}^* \mid \exists a \in \mathcal{A}, \exists n \in \mathbb{N} : P \sqsubseteq s^n(a)\}.$$

Definición 2.6 *Sea s una sustitución sobre \mathbb{Z}^d . Definimos el \mathbb{Z}^d -subshift generado por s como el conjunto $X_s := \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \mid \forall S \subsetneq \mathbb{Z}^d \text{ finito} : x|_S \in \mathcal{L}(s)\}$.*

Efectivamente, dada una \mathbb{Z}^d -sustitución s el conjunto X_s es un \mathbb{Z}^d -subshift en virtud del teorema 1.13, dado que la definición coincide con el subshift dado por el conjunto de patrones prohibidos que consiste en los patrones que no aparecen en $\mathcal{L}(s)$.

Tal como se dijo en la introducción de este capítulo, el sistema X_s se caracteriza por ser de baja complejidad. Para ilustrar esto se realiza un cálculo en el caso de \mathbb{Z}^d -sustituciones rectangulares.

Ejemplo Sea $n \in \mathbb{N}$ y s una \mathbb{Z}^d -sustitución rectangular de tamaño $(l_1, \dots, l_d) \in \mathbb{N}^d$ que actúa sobre un alfabeto \mathcal{A} . A continuación se estima el número de patrones de forma $R[l_1^n, l_2^n, \dots, l_d^n]$ para concluir que para $m \in \mathbb{N}$, $\log |\mathcal{L}(X_s)_{\Lambda_m}|$ es $o(m^d)$.

En primer lugar, todo patrón P que aparece en $x \in X_s$ debe por definición aparecer en $\mathcal{L}(s)$, es decir existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $P \sqsubseteq s^r(a)$ con $a \in \mathcal{A}$. De este modo, todo patrón de soporte $R[l_1^n, l_2^n, \dots, l_d^n]$ debe necesariamente aparecer como subpatrón entre patrones adyacentes de soporte $R[l_1^n, l_2^n, \dots, l_d^n]$ generados por s a partir de un solo símbolo. Por ejemplo, en el caso de una sustitución bidimensional se tiene que todo patrón de soporte $R[l_1^n, l_2^n]$ debe aparecer como subpatrón de un patrón que tiene la estructura:

$$\begin{array}{cc} s^n(a_1) & s^n(a_2) \\ s^n(a_3) & s^n(a_4) \end{array} \quad \text{donde } a_i \in \mathcal{A} \text{ para cada } i \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Si bien no todos los patrones de la forma de arriba aparecen en X_s , dicho arreglo de patrones es suficiente para mostrar la cota buscada. Así, en el caso multidimensional, existen $|\mathcal{A}|^{2^d}$ posibilidades para elegir los símbolos a_i y exáctamente $\prod_{j=1}^d (l_j^n + 1)$ rectángulos de tamaño (l_1^n, \dots, l_d^n) contenidos en dicha estructura (para todo $a \in \mathcal{A}$ el soporte de $s^n(a)$ es de tamaño (l_1^n, \dots, l_d^n) y en cada dirección j hay $2l_j^n$ posiciones, luego hay $l_j^n + 1$ formas de escoger l_j^n posiciones consecutivas). De esta forma se obtiene la cota:

$$|\mathcal{L}(X_s)_{R[l_1^n, l_2^n, \dots, l_d^n]}| \leq |\mathcal{A}|^{2^d} \prod_{j=1}^d (l_j^n + 1).$$

Por lo cual se obtiene:

$$\log |\mathcal{L}(X_s)_{R[l_1^n, l_2^n, \dots, l_d^n]}| \leq 2^d \log |\mathcal{A}| + \sum_{j=1}^d \log(l_j^n + 1).$$

Por lo cual, para $m \in \mathbb{N}$ tomando un $z \in \mathbb{Z}^d$ y el $n \in \mathbb{N}$ más pequeño tal que $z + \Lambda_m$ esté contenido en $R[l_1^n, l_2^n, \dots, l_d^n]$ se puede acotar $|\mathcal{L}(X_s)_{\Lambda_m}|$ por $|\mathcal{L}(X_s)_{R[l_1^n, l_2^n, \dots, l_d^n]}|$ y en consecuencia de la desigualdad anterior, el que para $S \subseteq S' \subsetneq \mathbb{Z}^d$ soportes finitos se tenga que $|\mathcal{L}(X_s)_S| \leq |\mathcal{L}(X_s)_{S'}|$ y el hecho de que n dependa logarítmicamente de m se tiene que: $\log |\mathcal{L}(X_s)_{\Lambda_m}|$ es $o(m^d)$.

Otra razón de la importancia del sistema X_s radica en que éste posee propiedades dinámicas heredadas de propiedades combinatoriales de la sustitución s . El siguiente teorema muestra que la minimalidad de X_s proviene de una propiedad que se denomina primitividad.

Definición 2.7 *Sea s una sustitución multidimensional sobre un alfabeto finito \mathcal{A} . Si $\forall a \in \mathcal{A}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que todo elemento de \mathcal{A} aparece en $s^k(a)$ decimos que la sustitución es primitiva.*

La condición de ser primitiva está cercanamente relacionada a la minimalidad de los sistemas dinámicos. El siguiente ejemplo muestra esta relación la cual posteriormente se formaliza en un teorema.

Ejemplo El subshift generado por la sustitución primitiva de Thue-Morse es minimal, en tanto la sustitución no primitiva que genera triángulos de Sierpinski no lo es (posee como subsistema propio un punto fijo compuesto únicamente del símbolo \circ).

Teorema 2.8 *Sea s una sustitución rectangular primitiva sobre \mathbb{Z}^d . Entonces X_s es un \mathbb{Z}^d -subshift minimal.*

DEMOSTRACIÓN. Mostraremos que $\forall x \in X_s$ se tiene que $\overline{\text{Orb}_\sigma(x)} = X_s$. Para ello bastará probar que todo patrón $P \in \mathcal{L}(s)$ cumple que $P \sqsubseteq x$. En efecto, supóngase que se tiene la propiedad anterior y sea $y \in X_s$, Sea $k \in \mathbb{N}$ y definamos $P_k := y|_{\Lambda_k}$. Como $P_k \sqsubseteq x$ entonces existe $z^{(k)} \in \mathbb{Z}^d$ tal que $\sigma^{z^{(k)}}(x)|_{\Lambda_k} = P_k = y|_{\Lambda_k}$. De esta manera se cumple que $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma^{z^{(k)}}(x) = y$.

Sea entonces $P \in \mathcal{L}(s)$. Cómo $P \in \mathcal{L}(s)$ existe $r \in \mathbb{N}$ y $b \in \mathcal{A}$ tal que $P \sqsubseteq s^r(b)$. Definamos $N := \max_{a \in \mathcal{A}} n_a$ donde n_a es el mínimo número natural tal que $s^{n_a}(a)$ contiene cada símbolo de \mathcal{A} (existen pues s es primitiva). En consecuencia $\forall a \in \mathcal{A}$ el símbolo $b \in \mathcal{A}$ aparece en $s^N(a)$. Luego se tiene que $\forall a \in \mathcal{A}$ $P \sqsubseteq s^{r+N}(a)$.

Cómo $x \in X_s$, cada patrón $P' \sqsubseteq x$ cumple que $P' \in \mathcal{L}(s)$, en consecuencia, tomando un subpatrón P' de x suficientemente grande entonces existe $a \in \mathcal{A}$ tal que $s^{r+N}(a) \sqsubseteq P'$. De este modo se tiene que $P \sqsubseteq P'$ y en consecuencia $P \sqsubseteq x$.

□

El teorema anterior también es válido en el caso de sustituciones unidimensionales primitivas (no es necesario que sean de tamaño uniforme) y la prueba es esencialmente la misma. El teorema anterior es utilizado en el capítulo 5 para mostrar que un sistema generado por sustituciones es minimal.

Sea $d \in \mathbb{N}$ y s una \mathbb{Z}^d -sustitución rectangular que actúa sobre un alfabeto finito \mathcal{A} . Podemos considerar el sistema dinámico topológico $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{S})$, donde \mathcal{S} es la acción generada por s mediante el semigrupo \mathbb{N}_0 , es decir: $\mathcal{S} = \{s^n | n \in \mathbb{N}_0\}$. Si bien el conjunto anterior está bien definido, existen puntos en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ que no poseen preimagen que se pueden remover. Al realizar lo anterior iterativamente aparecen cada vez más puntos que no tienen preimagen. Lo previo sumado a la arbitrariedad de la posición de referencia en la definición de la imagen $s(x)$ con $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ (se toma el origen como punto de referencia, pero podría ser cualquiera) motivan la siguiente definición:

Definición 2.9 *Sea s una sustitución rectangular en \mathbb{Z}^d . Definimos el \mathbb{Z}^d -subshift límite generado por s como el conjunto:*

$$X_s^l := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Orb}_\sigma(s^n(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d})).$$

En primer lugar, notemos que efectivamente X_s^l es un \mathbb{Z}^d -subshift. Por un lado X_s^l es claramente shift invariante. La cerradura proviene de que $\forall n \in \mathbb{N}$ el conjunto $s^n(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d})$ es cerrado y la órbita no cambia eso debido a que se tiene que:

$$\text{Orb}_\sigma(s^n(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d})) = \bigcup_{z \in R[l_1^n, \dots, l_d^n]} \sigma^z(s^n(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d})).$$

Es decir, solo una cantidad finita de shifts del conjunto $s^n(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d})$ obtienen conjuntos cerrados distintos, por lo cual dicha órbita es una unión finita de conjuntos cerrados. Es decir X_s^l es intersección numerable de conjuntos cerrados y en consecuencia es cerrado.

Lo interesante del conjunto X_s^l , además de lo descrito en el párrafo que motiva su definición, es que sus puntos corresponden exactamente a los de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ que poseen un pasado infinito de preimágenes bajo la acción de s . Precisamos esto en la siguiente proposición.

Proposición 2.10 $x \in X_s^l \iff \exists (x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0} \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ tal que $x = x^{(0)}$ y $\forall j \in \mathbb{N}_0 \exists z^{(j)} \in \mathbb{Z}^d$ tal que $x^{(j)} = \sigma^{z^{(j)}} \circ s(x^{(j+1)})$.

DEMOSTRACIÓN. Notemos en primer lugar que si $d \in \mathbb{N}$ y s es una \mathbb{Z}^d -sustitución rectangular de tamaño $l = (l_1, \dots, l_d) \in \mathbb{N}^d$ entonces para $z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{Z}^d$ y $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ se tiene que $s(\sigma^z(x)) = \sigma^{z(l)}(s(x))$ donde $z(l) := (l_1 z_1, l_2 z_2, \dots, l_d z_d)$.

Considérese primero una secuencia $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0} \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ como arriba y veamos que $x \in X_s^l$. En efecto, $x = \sigma^{z^{(0)}} \circ s(x^{(1)})$, luego $x \in \text{Orb}_\sigma(s(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}))$. Luego $x^{(1)} = \sigma^{z^{(1)}} \circ s(x^{(2)})$ lo cual muestra que $x = \sigma^{z^{(0)}} \circ s(\sigma^{z^{(1)}} \circ s(x^{(2)})) = \sigma^{z^{(0)} + z^{(1)}(l)} \circ s^2(x^{(2)})$, luego $x \in \text{Orb}_\sigma(s^2(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}))$. Iterando este argumento se tiene que $\forall n \in \mathbb{N} x \in \text{Orb}_\sigma(s^n(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}))$ y en consecuencia $x \in X_s^l$.

La otra dirección es sencilla, sea $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Orb}_\sigma(s^n(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}))$. Luego existe $z^{(0)} \in \mathbb{Z}^d$ y $x^{(1)}$ en X_s^l tal que $x_0 := x = \sigma^{z^{(0)}} s(x^{(1)})$. Repitiendo el argumento para $x^{(1)}$ e iterando se obtiene una secuencia con las propiedades buscadas.

□

Una relación importante entre los \mathbb{Z}^d -subshifts X_s y X_s^l es que $X_s \subseteq X_s^l$. Para ver eso simplemente hay que notar que cada punto $x \in X_s$ se puede escribir como $x = \sigma^z \circ s(x')$ para algún $z \in \mathbb{Z}^d$ y $x' \in X_s$ (es simplemente un argumento de compacidad). Iterando lo anterior y usando la proposición 2.10 se tiene este resultado. A pesar de esto la contención contraria no siempre es cierta. Se ilustra lo anteriormente comentado en el siguiente ejemplo:

Ejemplo Sea $\mathcal{A} := \{\circ, \bullet\}$ y s \mathbb{Z}^2 -sustitución cuadrada de tamaño 2 dada por las reglas:

$$\circ \rightarrow \begin{array}{cc} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{array}, \quad \bullet \rightarrow \begin{array}{cc} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{array}.$$

Dado que todos los patrones que se obtienen para $n \in \mathbb{N}$ de $s^n(\circ)$ y $s^n(\bullet)$ son monocromáticos, se tiene que el \mathbb{Z}^2 -subshift X_s consiste únicamente de dos puntos fijos, uno constituido sólo del símbolo \circ y otro sólo del símbolo \bullet . Sin embargo X_s^l además de poseer dichos puntos tiene más elementos. Por ejemplo X_s^l tiene elementos de la forma:

$$\begin{array}{cccccccc} \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & \circ & \circ & \circ & \bullet & \bullet & \bullet & \cdots \\ \cdots & \circ & \circ & \circ & \bullet & \bullet & \bullet & \cdots \\ \cdots & \circ & \circ & \circ & \bullet & \bullet & \bullet & \cdots \\ \cdots & \bullet & \bullet & \bullet & \circ & \circ & \circ & \cdots \\ \cdots & \bullet & \bullet & \bullet & \circ & \circ & \circ & \cdots \\ \cdots & \bullet & \bullet & \bullet & \circ & \circ & \circ & \cdots \\ \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{array}.$$

En general, $x \in X_s^l \Leftrightarrow \exists(\bar{z}_1, \bar{z}_2) \in \mathbb{Z}^2$ y valores $(a_i)_{i \in \{1,2,3,4\}}$ en $\{\circ, \bullet\}$ tales que para cada coordenada $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$ se tiene el símbolo:

$$x_z = \begin{cases} a_1 & \text{si } z_1 \geq \bar{z}_1 \wedge z_2 \geq \bar{z}_2 \\ a_2 & \text{si } z_1 \geq \bar{z}_1 \wedge z_2 < \bar{z}_2 \\ a_3 & \text{si } z_1 < \bar{z}_1 \wedge z_2 \geq \bar{z}_2 \\ a_4 & \text{si } z_1 < \bar{z}_1 \wedge z_2 < \bar{z}_2 \end{cases}.$$

El ejemplo anterior muestra que en general, el conjunto X_s^l puede ser más grande que X_s , de hecho en ese ejemplo extremo se muestra que mientras que la cardinalidad de X_s puede ser finita, $|X_s^l|$ puede ser numerable. Sin embargo generalmente $|X_s^l|$ no es mucho más grande que $|X_s|$. De hecho, lo que ocurre usualmente es que $|X_s| = |\mathbb{R}|$ y que $|X_s^l \setminus X_s| = |\mathbb{Z}|$. Más

aún, desde el punto de vista de los sistemas dinámicos abstractos, los puntos de $X_s^l \setminus X_s$ son errantes, es decir, constituyen un conjunto de medida 0.

Una pregunta interesante sobre este tipo de sistemas es si son de tipo finito, sóficos o si pertenecen a alguna clase más amplia. En la siguiente sección se entrega una respuesta parcial a dicho problema para X_s en el caso de \mathbb{Z}^2 -sustituciones rectangulares.

2.3. Teorema de Mozes

En el año 1989 el matemático Shahar Mozes resolvió un problema de clasificación importante tanto en la teoría de sustituciones como en la teoría general de la dinámica simbólica, mostrando que una gran clase de subshifts generados por sustituciones son de tipo sófico. Una versión moderna y un poco menos general de su teorema sería la siguiente:

Teorema 2.11 [18] *Sea s una \mathbb{Z}^2 -sustitución rectangular. Entonces X_s es un \mathbb{Z}^2 -subshift de tipo sófico.*

Antes de hablar de los alcances de dicho teorema, es importante decir éste es en realidad más general, y es válido para sustituciones donde la imagen $s(a)$ de cada letra $a \in \mathcal{A}$ es un rectángulo de tamaño arbitrario pero que satisface una condición de consistencia que Mozes denomina de *tipo A*.

La condición de ser de *tipo A* consiste en que para cada patrón B generado por la sustitución, y para cada patrón Q de tamaño $(2, 2)$ con $Q \sqsubseteq B$, entonces: para cada secuencia de derivaciones: $Q = Q_0 \rightarrow Q_1 \rightarrow \dots \rightarrow Q_r$ donde Q_{i+1} es un patrón derivado de Q_i , debe existir una secuencia $B = B_0 \rightarrow B_1 \rightarrow \dots \rightarrow B_r$ donde B_{i+1} es derivado de B_i tal que para $0 \leq i \leq r$ Q_i está contenido en B_i . En el caso de sustituciones rectangulares como las que tratamos en esta memoria, esa condición siempre se cumple.

La demostración del teorema de Mozes es básicamente la construcción explícita de una extensión SFT. Es decir, un \mathbb{Z}^2 -SFT X y un código factor ϕ tal que $\phi(X) = X_s$. Dicha extensión tiene una gran cantidad de símbolos y es específica para el caso de \mathbb{Z}^2 . De hecho, aún no es claro (no ha llevado a cabo) como extender esa construcción al caso de \mathbb{Z}^d -sustituciones con $d > 2$.

Otra limitación del resultado de Mozes es que si bien prueba que todos los \mathbb{Z}^2 -subshifts X_s generados por \mathbb{Z}^2 -sustituciones rectangulares s son sóficos, no da información alguna sobre la posibilidad de que sean estrictamente sóficos (es decir, que no sean \mathbb{Z}^2 -SFT), o de que sean simplemente \mathbb{Z}^2 -SFT. Al estudiar estos sistemas resulta sencillo encontrar ejemplos triviales de cada caso.

Ejemplo Sea $\mathcal{A} := \{\bullet\}$ y s dado por la única regla:

$$\bullet \rightarrow \begin{array}{cc} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{array}$$

Claramente genera un \mathbb{Z}^2 -SFT X_s compuesto de un único punto fijo.

Ejemplo Sea $\mathcal{A} := \{\circ, \bullet\}$ y s dado por las reglas:

$$\circ \rightarrow \begin{array}{cc} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{array}, \quad \bullet \rightarrow \begin{array}{cc} \circ & \bullet \\ \bullet & \circ \end{array}.$$

Esta sustitución genera un subshift que es estrictamente sófico. Corresponde a los puntos que tienen a lo más una diagonal de \bullet en un mar de \circ . Es de tipo estrictamente sófico dado que si fuese un \mathbb{Z}^2 -SFT existiría un $n \in \mathbb{N}$ tal que todos los patrones prohibidos tendrían su soporte contenido en Λ_n , y de esta forma podría aparecer más de una diagonal de \bullet en un mismo punto si su separación es suficientemente grande.

En el capítulo 5 de esta memoria se presenta la construcción de un ejemplo de un \mathbb{Z}^2 -SFT minimal X_s generado por una \mathbb{Z}^2 -sustitución s cuadrada de tamaño 2, que no es trivial, es decir, no posee órbitas periódicas.

Es importante notar que el mismo resultado de ser de tipo sófico no se tiene para sustituciones sobre \mathbb{Z} . Por ejemplo, la sustitución de Thue-Morse da lugar a un \mathbb{Z} -subshift minimal de acuerdo a 2.8 que no puede ser de tipo sófico. Más aún, no existen \mathbb{Z} -subshifts sóficos infinitos que provengan de sustituciones primitivas. Esto es dado que cada \mathbb{Z} -subshifts de tipo sófico es representable como el conjunto de caminos bi-infinitos en un grafo etiquetado, y en consecuencia debe contener órbitas finitas. Luego los únicos \mathbb{Z} -subshifts sóficos que provienen de sustituciones primitivas (y por ende son minimales) son en realidad \mathbb{Z} -SFT que consisten de una única órbita finita.

Para el caso del subshift límite X_s^l generado por una sustitución s hay un resultado reciente que puede ser encontrado en [16] donde se prueba que si s es una \mathbb{Z}^2 -sustitución cuadrada de tamaño 2, entonces X_s^l es de tipo sófico.

En el capítulo 4 de esta memoria se realiza una demostración alternativa de que para \mathbb{Z}^2 -sustituciones cuadradas de tamaño 2 X_s^l es un \mathbb{Z}^2 -subshift sófico, y se generaliza dicho resultado para \mathbb{Z}^2 -sustituciones rectangulares de tamaño arbitrario.

Capítulo 3

\mathbb{Z}^2 -subshifts de tipo finito sin puntos periódicos

3.1. Una introducción histórica al problema de existencia de \mathbb{Z}^2 -SFT sin puntos periódicos

Uno de los grandes avances en la teoría de subshifts multidimensionales es la construcción de un \mathbb{Z}^2 -SFT sin puntos periódicos. Tal construcción es imposible de realizar en el caso de los \mathbb{Z} -SFT dado que su representación como un conjunto de caminos bi-infinitos en un digrafo necesariamente implica que dicho digrafo posee un ciclo dirigido, y por lo tanto que todo \mathbb{Z} -SFT no vacío posee puntos periódicos. La interrogante sobre la existencia de puntos periódicos no es tan sencilla en el caso de \mathbb{Z}^2 -SFT y su respuesta posee algo de historia, la cual comienza con una pregunta conocida en ese entonces como el *domino problem*.

El *domino problem* consiste en lo siguiente: ¿existe algún algoritmo que decida si un conjunto finito de baldosas de Wang generan un embañosado de Wang no vacío? Hao Wang demostró que si cada embañosado de Wang admite al menos un punto periódico, entonces el *domino problem* es decidible. En virtud de lo anterior se denominó *conjetura de Wang* a la afirmación de que cada embañosado de Wang no vacío admite al menos un punto periódico.

El año 1966 Berger demostró que la *conjetura de Wang* es falsa. En su trabajo [2] construye un embañosado de Wang sin puntos periódicos y posteriormente utilizando propiedades de dicho embañosado prueba que el *domino problem* es indecidible. Si bien esto resolvió la conjetura, su ejemplo resultó ser muy complicado pues codifica máquinas de Turing en las baldosas. De hecho su construcción consiste de un alfabeto con 20426 baldosas distintas.

Posterior al ejemplo de Berger surgieron algunos ejemplos de \mathbb{Z}^2 -SFTs sin puntos periódicos más sencillos. Entre ellos se encuentra el embañosado de Robinson (1971) [23] el cual se estudia con detalle más adelante. Actualmente el embañosado de Wang no vacío sin puntos periódicos con el alfabeto más pequeño conocido es el ejemplo de Kari-Culik [4], el cual consiste de 13 baldosas que teselan el plano solamente de manera aperiódica. En la figura 3.1

se muestran las baldosas del ejemplo de Kari-Culik:

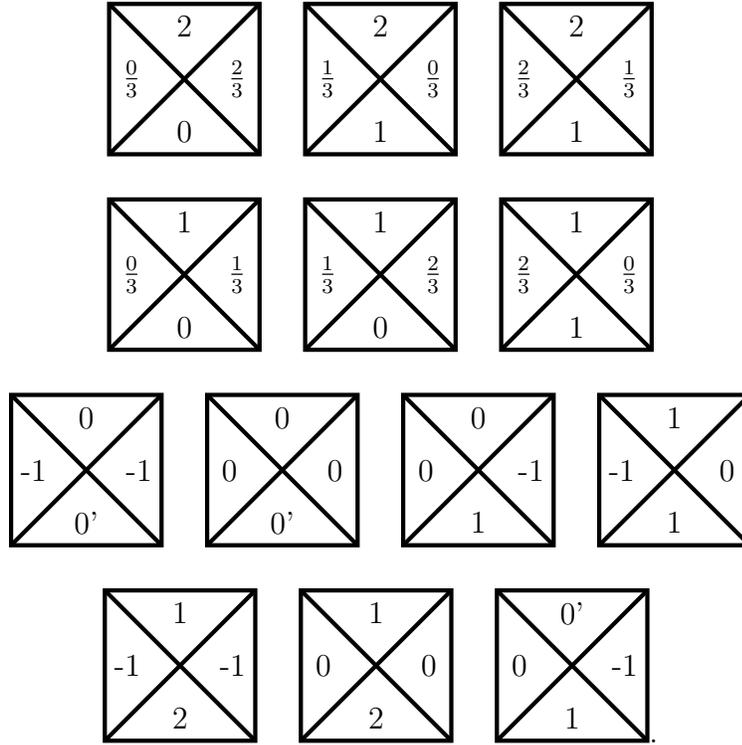


Figura 3.1: Las baldosas del ejemplo de Kari-Culik.

Utilizando las baldosas de Kari-Culik es posible construir un embañosado aperiódico de Wang no vacío. Si bien este es el ejemplo de embañosado de Wang con dichas propiedades cuyo alfabeto es más pequeño dentro de los ejemplos conocidos, en esta memoria solo se estudia en detalle el embañosado de Robinson, que puede ser representado de una manera más sencilla y cuya estructura es útil al momento de realizar las demostraciones de los capítulos 4 y 5.

Los ejemplos generados en la búsqueda de embañosados sin puntos periódicos con alfabetos tan pequeños como sea posible han dejado de paso estructuras interesantes que pueden ser utilizadas para probar otros teoremas de la dinámica simbólica, por ejemplo, en el capítulo 4 se utiliza la estructura del embañosado de Robinson, que se estudia a continuación, para generar una familia de extensiones SFT para una clase de \mathbb{Z}^2 -subshifts. En el último capítulo de esta memoria se construye un ejemplo de un \mathbb{Z}^2 -SFT minimal sin puntos periódicos generado por una sustitución que nuevamente utiliza la estructura del embañosado de Robinson como base.

Antes de comenzar, es necesario hacer una definición que es útil al momento de estudiar el embañosado de Robinson.

Definición 3.1 Sea $d \in \mathbb{N}$ y sea $(l_1, l_2, \dots, l_d) \in \mathbb{N}^d$. Se dice que un subconjunto de \mathbb{Z}^d es un (l_1, l_2, \dots, l_d) -látice si existe $z \in \mathbb{Z}^d$ tal que dicho subconjunto es de la forma $z + l_1\mathbb{Z} \times l_2\mathbb{Z} \times \dots \times l_d\mathbb{Z}$. Es decir, se puede escribir de la siguiente manera: $\{g \in \mathbb{Z}^d \mid \forall 1 \leq i \leq d, \exists m \in \mathbb{Z} : g_i = z_i + ml_i\}$. Si se cumple que existe $L \in \mathbb{N}$ tal que $\forall 1 \leq i \leq d : l_i = L$ entonces se dirá

simplemente que el subconjunto es un L -látice.

3.2. El embaledado de Robinson

En esta sección se describe en detalle el embaledado de Robinson, se utiliza de manera indistinta los nombres embaledado de Robinson y shift de Robinson. La descripción que se hace en esta sección corresponde a una forma moderna en que usualmente se describe este subshift. Robinson originalmente en su publicación del año 1971 [23] describió su construcción en términos de seis figuras que pueden ser utilizadas para teselar el plano. Como esas figuras no son cuadrados las llamaremos *protobaldosas*. En la figura 3.2 se encuentran las figuras utilizadas en la descripción original de Robinson.

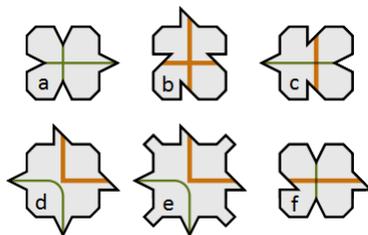


Figura 3.2: Las protobaldosas originales del embaledado de Robinson.

Las protobaldosas de Robinson se pueden reflejar y rotar en múltiplos de $\pi/2$ de manera arbitraria, de esta forma generan una teselación aperiódica del plano. Para probar esto utilizaremos una representación diferente de las protobaldosas de Robinson a las cuales le agregaremos una regla extra. Esta nueva representación es equivalente y tan solo utiliza baldosas junto con una regla especial.

El embaledado de Robinson es el conjunto X_{Rob} de puntos en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ donde \mathcal{A} está dado por las siguientes baldosas junto a sus reflexiones y rotaciones en múltiplos de $\pi/2$.

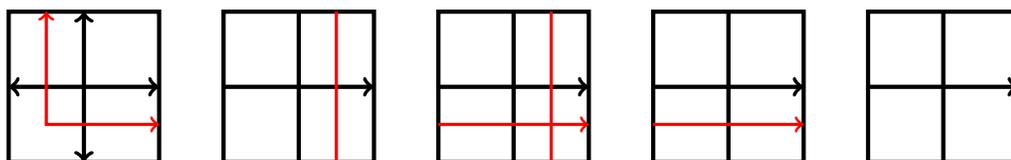


Figura 3.3: Las baldosas básicas del shift de Robinson.

En las baldosas del shift de Robinson hay dos tipos de líneas distintas. Las líneas que pasan por el centro de la baldosa son líneas negras y las líneas que no tocan el centro son de color rojo (y son un poco menos gruesas). La correspondencia entre las protobaldosas y las baldosas está dada por la siguiente correspondencia. Si numeramos de izquierda a derecha las baldosas de la figura 3.3, tendremos que las correspondencias son:

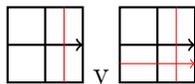
Correspondencias de protobaldosas a baldosas	
Protobaldosas	Baldosa
a	5
b	3 rotada \circlearrowleft en $\pi/2$
c	2 rotada \circlearrowleft en π
d, e	1
f	4

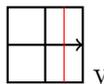
La razón de que existan dos protobaldosas que se relacionan a una misma baldosa, es que la única diferencia entre ellas es que una de estas dos protobaldosas tiene esquinas que no son achatadas, y obligan a que se forme un 2-látice de ellas. En el embaledado de Robinson representado con baldosas se logra el mismo objetivo introduciendo una regla adicional que no es de tipo nearest neighbor.

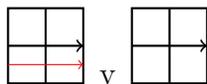
Antes de continuar, les daremos nombre a las baldosas del shift de Robinson:

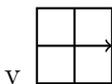


1. A la baldosa  junto con sus respectivas rotaciones se le denominará cruz. Hay 4 baldosas de este tipo y es el único tipo de baldosa en donde todas las líneas negras apuntan hacia afuera de la baldosa (son puntas de flecha).



2. A las baldosas  y  más sus rotaciones y reflexiones se las denomina baldosas de unión. Su nombre recupera el hecho de que poseen una línea roja (en los casos dibujados es la línea vertical) que no posee puntas de flechas, luego debe unir dos puntas de flechas. Hay 12 baldosas de este tipo.



3. A las baldosas  y  junto a sus rotaciones y reflexiones se las denomina baldosas de extensión. Hay 12 baldosas de este tipo y su nombre proviene de que sirven para extender las líneas (rojas y negras) que se originan en una cruz.

En total esta representación del embaledado de Robinson posee 28 baldosas distintas. El conjunto de patrones prohibidos de X_{Rob} es el generado por las siguientes dos reglas:

1. Esta regla de adyacencia es similar a las de los embaledados de Wang. La punta de una flecha negra siempre debe ir adyacente a una cola de flecha negra. Del mismo modo la punta de una flecha roja siempre debe ir junto a una cola de flecha roja.
2. Deberá existir en cada punto de X_{Rob} un 2-látice donde solo pueden ir cruces.

La primera regla es de tipo nearest neighbor. La segunda regla puede obtenerse prohibiendo todos los patrones cuadrados de tamaño 3 que no correspondan a uno de los casos mostrados en la figura 3.4. Los cuadrados negros representan posiciones donde deben ir necesariamente cruces mientras en el resto de las posiciones puede ir a priori cualquier baldosa. Sin embargo las reglas del embaledado de Robinson prohíben la aparición de dos cruces adyacentes, por lo cual los cuadrados blancos representan que ahí puede ir cualquier otra baldosa que no sea una cruz, mientras que los cuadrados grises representan que en esa posición puede ir cualquier baldosa. En virtud de lo anterior, mirando un bloque cuadrado de tamaño suficientemente grande (por ejemplo de tamaño 5), no hay problema para reconocer el 2-látice de cruces.

Simplemente basta ver donde ocurre la primera configuración de la figura 3.4.

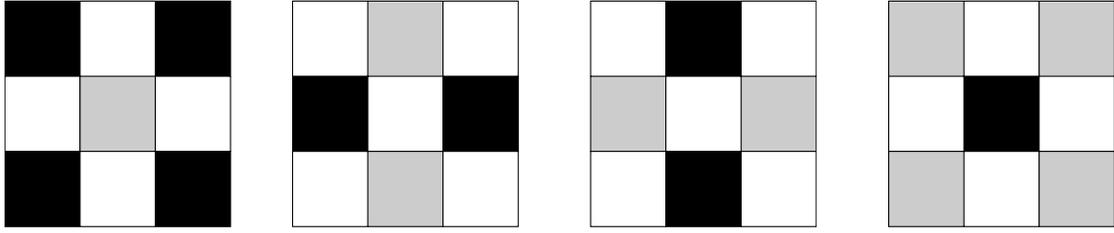


Figura 3.4: Casos posibles para patrones de tamaño 3×3 .

De esta manera las dos reglas anteriores pueden realizarse utilizando un conjunto finito de patrones prohibidos, por lo cual X_{Rob} es un \mathbb{Z}^2 -SFT.

Las dos reglas anteriormente mencionadas se pueden recodificar en nuevas baldosas de modo tal que las reglas sean las correspondientes a un embaledado de Wang. Sin embargo hacer eso hace crecer el alfabeto, por lo cual es preferente trabajar con la presentación expuesta anteriormente.

A continuación se mostrará que X_{Rob} es un \mathbb{Z}^2 -SFT no vacío y sin puntos periódicos. Para ello se mostrará que las reglas de X_{Rob} fuerzan una estructura jerárquica. Las demostraciones originales de estos resultados pueden ser encontradas en [23]. Para realizar dichas pruebas es necesario introducir una estructura que aparece de manera jerárquica en el shift de Robinson.

Definición 3.2 *Sea $n \in \mathbb{N}$. Se dice que un patrón del shift de Robinson cuyo soporte es un cuadrado de tamaño $2^n - 1$ es un supertile de orden n (también se dice que es un supertile de nivel n) si se cumple lo siguiente:*

1. *En el caso $n = 1$, si la única baldosa del patrón es una cruz.*
2. *En el caso en que $n > 1$, si la baldosa del centro del patrón cuadrado corresponde a una cruz, y los cuatro patrones de tamaño $2^{n-1} - 1$ que se ubican en los extremos del bloque corresponden a supertiles de nivel $n - 1$ tales que las líneas rojas que se originan en las cruces de sus baldosas centrales se unen (ver figura 3.5).*

Un argumento combinatorial inductivo muestra que $\forall n \geq 1$ solo existen cuatro posibles supertiles de nivel n , es decir, la cruz de la baldosa central determina todas las otras baldosas del supertile. A continuación se muestran ejemplos de orden 2 y 3 en las figuras 3.6 y 3.7.

Es importante comentar que en cada supertile se cumple que en todo su borde las flechas negras apuntan hacia afuera de éste y que solo salen desde el borde las dos líneas rojas que se originan en la baldosa central. Dichas líneas dependen de la orientación de la cruz en la posición central del supertile.

Ahora que se han definido los supertiles del shift de Robinson, se está en condiciones de probar que éste no es vacío y que no contiene puntos periódicos.

Teorema 3.3 $X_{\text{Rob}} \neq \emptyset$.

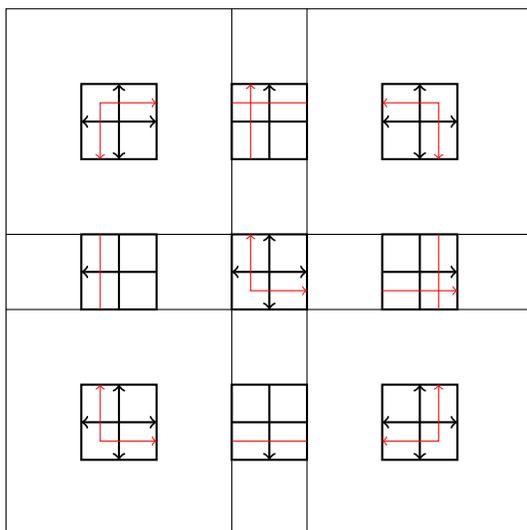


Figura 3.5: La estructura de un supertile de nivel $n > 1$. Los cuadrados grandes corresponden a los supertiles de orden $n - 1$ de la definición. Todas las baldosas en este supertile están determinadas por la baldosa central.

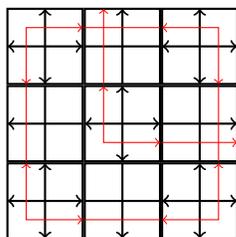


Figura 3.6: Un supertile de orden 2. Los otros tres supertiles de orden 2 son rotaciones de este.

DEMOSTRACIÓN. La prueba de que el shift de Robinson no es vacío es simplemente un argumento de compacidad. Sea $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ una secuencia de puntos en el full \mathbb{Z}^2 -shift cuyo alfabeto corresponde al del shift de Robinson, tal que $\forall n \in \mathbb{N} : x^{(n)}|_{\Lambda_{2(n-1)-1}}$ corresponde a un supertile de nivel n . Por compacidad del full \mathbb{Z}^2 -shift existe una subsucesión convergente. Sea \bar{x} el límite de esa sucesión. Se afirma que \bar{x} es un punto del shift de Robinson. En efecto, como \bar{x} es el límite de una subsucesión de $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, entonces $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\bar{x}|_{\Lambda_{2(n-1)-1}}$ es un supertile de nivel n , los cuales son patrones localmente admisibles. En consecuencia $\forall S \subseteq \mathbb{Z}^2$ finito se tiene que en $\bar{x}|_S$ no aparecen patrones prohibidos de X_{Rob} por lo que $\bar{x} \in X_{\text{Rob}}$.

□

Teorema 3.4 X_{Rob} no contiene puntos periódicos.

DEMOSTRACIÓN. Para probar que ningún punto del embaldosado de Robinson es periódico, lo que realmente se hace es probar que en cualquier punto del shift de Robinson deben aparecer supertiles de orden arbitrariamente grande.

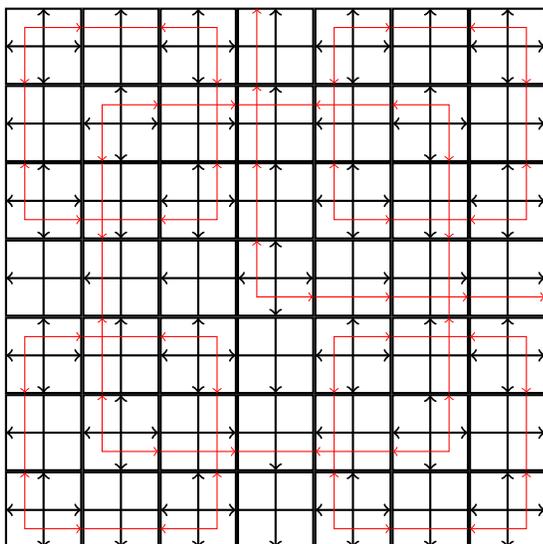


Figura 3.7: Un supertile de orden 3. Los otros tres supertiles de orden 3 son rotaciones de este.

En efecto, sea $x \in X_{\text{Rob}}$ un punto arbitrario y considérese una cruz de su 2-látice de cruces, se mostrará que necesariamente está en la esquina un supertile de orden 2 mediante simplemente probar todas las posibilidades. Utilizando que dicha cruz está en el 2-látice de cruces y las líneas rojas de cada cruz deben ser continuadas necesariamente mediante líneas rojas, se deduce que dicha cruz está junto a otras tres cruces del 2-látice de cruces orientadas de modo que forman un cuadrado. Las baldosas entre ellas solo pueden ser rellenas por baldosas de unión, dado que las líneas rojas que unen dos cruces (del 2-látice) a distancia 1 no pueden tener flechas en sus extremos. En virtud de la orientación de las baldosas de unión, se observa que en cada una de ellas hay una flecha negra que apunta hacia afuera del patrón cuadrado de tamaño 2 y que en la otra dirección tiene una cola de flecha. Eso a su vez fuerza a que la baldosa del centro sea una cruz, lo cual concluye que necesariamente el patrón cuadrado de tamaño 2 es un supertile de nivel 2. Los detalles de esta deducción se pueden apreciar visualmente de mejor manera en la figura 3.8.

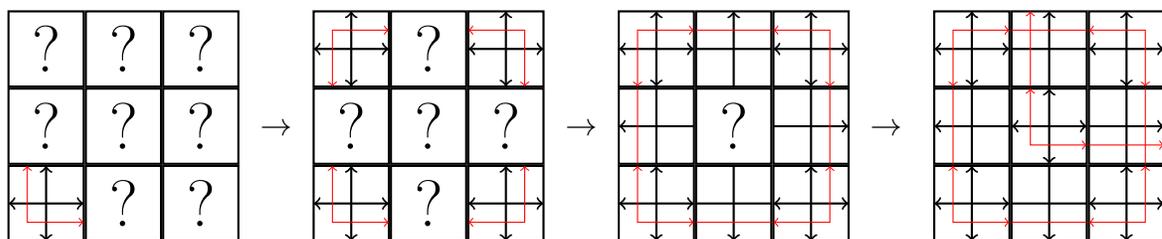


Figura 3.8: Esquema de deducción que cada cruz del 2-látice debe estar en un supertile de orden 2.

Inductivamente para $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ se considera un supertile de nivel n y mediante un argumento muy similar que consiste en agotar nuevamente todas las combinaciones se deduce que debe ser uno de los cuatro bloques de los extremos de un supertile de nivel $n + 1$ (de la forma en que se muestra en la figura 3.5). Si el punto considerado tuviese algún periodo,

entonces al hacer un shift por ese periodo cada supertile quedaría fijo, lo cual no puede ocurrir debido a que existen supertiles de nivel arbitrariamente grande y en consecuencia, algún supertile suficientemente grande no quedaría fijo.

□

Los argumentos desarrollados en la demostración anterior delimitan fuertemente la estructura de cada punto de X_{Rob} . En efecto, el hecho de que cada cruz del 2-látice de cruces en el shift de Robinson deba formar parte de algún supertile de nivel arbitrariamente grande implica que necesariamente en un punto de X_{Rob} aparezcan a lo más cuatro estructuras con soportes de la forma $z + (\pm\mathbb{N} \times \pm\mathbb{N})$ con $z \in \mathbb{Z}^2$ que pueden verse como límites de una sucesión de supertiles de nivel n , con $n \in \mathbb{N}$. Por ejemplo, si $x \in X_{\text{Rob}}$ es tal que $\forall n \in \mathbb{N} x|_{R[2^n-1, 2^n-1]}$ es un supertile de nivel n tal que su cruz central es la baldosa:



Entonces $x|_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ es una de esas estructuras. Llamaremos a dichas estructuras *supertiles de nivel infinito*. De esta forma, los puntos en X_{Rob} tienen la forma que se muestra en la figura 3.9. Mediante shifts de este tipo de puntos, también es posible que los supertiles de nivel infinito tengan soportes de la forma $z + (\mathbb{Z} \times \pm\mathbb{N})$, $z + (\pm\mathbb{N} \times \mathbb{Z})$ o simplemente $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ con $z \in \mathbb{Z}^2$.

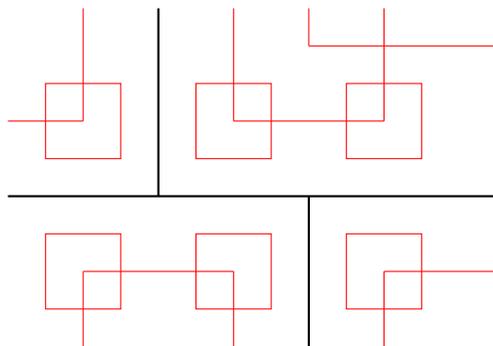


Figura 3.9: Estructura típica de un punto de X_{Rob} formado por cuatro supertiles de nivel infinito. Las líneas que separan dichos supertiles están compuestas de baldosas de extensión y se denominan líneas de falla.

De esta forma, se obtiene que cada punto x en X_{Rob} cae en una de las siguientes dos categorías:

1. x está formado por un único supertile de nivel infinito cuyo soporte es todo \mathbb{Z}^2 . En este caso el punto tiene una estructura regular en donde las baldosas centrales de cada uno de sus supertiles de nivel n están alineadas en un 2^n -látice.
2. x no es de la forma anterior, y por lo tanto contiene entre dos y cuatro supertiles de nivel infinito que no están alineados, es decir, en este caso $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que los centros de los supertiles de nivel n no están en un 2^n -látice. Las líneas infinitas que separan los

distintos supertiles se llaman líneas de falla. La figura 3.9 muestra un punto formado por cuatro supertiles de nivel infinito. Más detalles sobre estas estructuras se puede encontrar en [9].

Esto inmediatamente muestra que X_{Rob} no es un \mathbb{Z}^2 -SFT minimal. En efecto, si consideramos un $x \in X_{\text{Rob}}$ formado por un único supertile de nivel infinito, entonces necesariamente los centros de todos sus supertiles de nivel n estarán alineados en un 2^n -látice. Sin embargo puntos como el mostrado en la figura 3.9 no poseen esa propiedad y en consecuencia no pertenecen a $\overline{\text{Orb}_\sigma(x)}$.

Definición 3.5 *Se dice que $x \in X_{\text{Rob}}$ es un punto tipo látice si $\forall n \in \mathbb{N}$ existe un 2^n -látice tal que x restringido a dicho látice está compuesto únicamente por cruces que son centros de supertiles de nivel n .*

Definición 3.6 *Se define a $X_{\text{Rob}}^{\text{min}}$ como el conjunto de todos los puntos tipo látice contenidos en X_{Rob} .*

Una propiedad interesante del embaledado de Robinson es que contiene un solo subsistema minimal. La demostración de este hecho es simple y se puede encontrar con más detalles en [9]. Antes de esbozar dicha demostración precisemos lo anterior en un teorema.

Teorema 3.7 *El conjunto $X_{\text{Rob}}^{\text{min}}$ es el único subsistema minimal de X_{Rob} .*

DEMOSTRACIÓN. La prueba consiste simplemente en notar que dado que en cada punto x de X_{Rob} aparecen supertiles de nivel arbitrariamente grande, entonces todos los puntos de $X_{\text{Rob}}^{\text{min}}$ son necesariamente puntos de acumulación de $\overline{\text{Orb}_\sigma(x)}$. Por lo tanto todo subsistema no vacío de X_{Rob} debe contener a $X_{\text{Rob}}^{\text{min}}$. En particular, todo subsistema no vacío de $X_{\text{Rob}}^{\text{min}}$ debe contener a $X_{\text{Rob}}^{\text{min}}$ y en consecuencia $X_{\text{Rob}}^{\text{min}}$ es minimal.

□

La demostración del teorema anterior con más detalles se puede encontrar en [9]. La importancia de $X_{\text{Rob}}^{\text{min}}$ para esta memoria radica en que su estructura es muy útil para almacenar información en sus 2^n -látices. En particular se utiliza para guardar el pasado de una \mathbb{Z}^2 -sustitución cuadrada de tamaño 2. Se pueden encontrar más detalles sobre esto en el capítulo 4.

3.3. Una generalización: El embaledado de Robinson generalizado

En esta sección se generaliza el embaledado de Robinson de modo tal que los supertiles de nivel n para $n \in \mathbb{N}$ posean soportes rectangulares arbitrarios en vez de cuadrados de tamaño $2^n - 1$. Esta construcción es de gran utilidad en el próximo capítulo para extender el

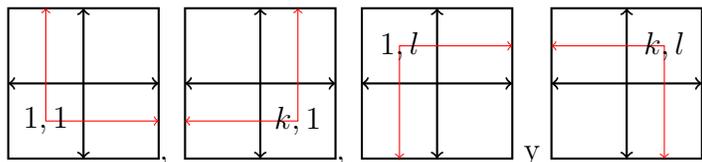
resultado de que los subshifts límites generados por \mathbb{Z}^2 -sustituciones cuadradas de tamaño 2 son de tipo sófico al caso general de sustituciones rectangulares.

A modo de realizar lo descrito en el párrafo anterior, se necesita nuevamente una estructura donde se asegure la existencia de un 2-látice de cruces, sin embargo acá se requiere que cada supertile se construya como un arreglo rectangular de supertiles del nivel anterior. Lo anterior se necesita a modo de poder codificar la historia de sustituciones rectangulares. Para hacer esto se utilizará una estructura más rígida donde se aumenta el número de cruces y las líneas que las conectan se identifican de manera única. De esta manera se asegura que un patrón rectangular en el 2-látice de cruces se cierra en un supertile. Más adelante se verán ejemplos de ésto.

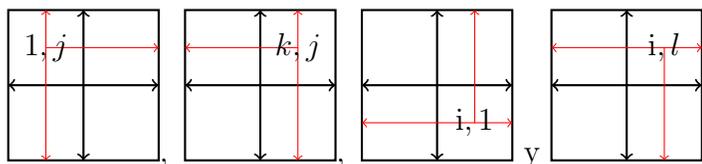
Dados números enteros $k, l \geq 2$ se define el \mathbb{Z}^2 -SFT $X_{\text{Rob}}(k, l)$ dado por el alfabeto $\mathcal{A}(X_{\text{Rob}}(k, l))$ compuesto por los siguientes tipos de baldosas que no admiten rotación ni reflexión:

1. **Cruces:** hay $k \cdot l$ cruces distintas, cada una identificada por una tupla (i, j) donde $1 \leq i \leq k$ y $1 \leq j \leq l$. Estas se ven representadas visualmente de tres formas distintas dependiendo de la tupla:

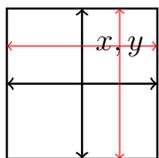
- (a) Si la tupla que representa a la baldosa es $(1, 1)$, $(k, 1)$, $(1, l)$ o (k, l) las representaciones son respectivamente:



- (b) Si la tupla que identifica la baldosa es de la forma $(1, j)$, (k, j) , $(i, 1)$ o (i, l) con $1 < i < k$ y $1 < j < l$, entonces la baldosa se representa de la siguiente forma respectivamente:



- (c) Si la tupla que identifica la baldosa es de la forma (i, j) con $1 < i < k$ y $1 < j < l$, es decir, no está en el borde del rectángulo $R[k, l]$, entonces la baldosa se representa de la forma:



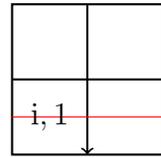
En total hay $k \cdot l$ baldosas de este tipo, y son, al igual que en el caso del shift de Robinson, los centros de los supertiles (serán definidos posteriormente). La representación visual con flechas cumple simplemente una función visual, dado que cada cruz está totalmente

identificada por su tupla. Es importante notar que en el caso $(k, l) = (2, 2)$ hay solo 4 cruces, al igual que en el shift de Robinson original.

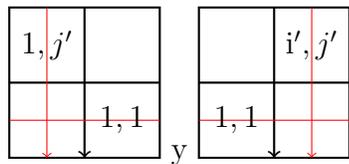
2. **Baldosas de unión:** Al igual que en el embaledado de Robinson, tenemos baldosas de unión. La diferencia fundamental, es que en esta generalización, las líneas acarrean la información específica de la tupla de la cruz donde se originó. En ese sentido, las baldosas de unión deben contener la información de que par de líneas pueden unir. Nuevamente tenemos varios tipos de líneas de unión:

(a) Unión horizontal: consisten de una línea horizontal junto a una tupla (i, j) con $1 \leq i < k$ y $1 \leq j \leq l$ y significa que unen la flecha roja horizontal (los colores son los mismos que en el shift de Robinson) que trae el símbolo (i, j) con la flecha roja horizontal que trae $(i + 1, j)$. Dependiendo de los valores de (i, j) pueden tomar formas distintas:

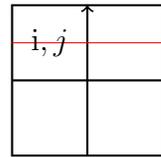
i. Si $j = 1$ se representan de la manera siguiente:



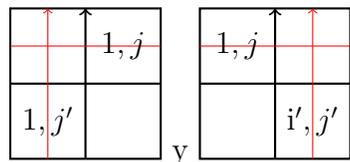
Si además se cumple que $i = 1$ la baldosa puede incluir la siguiente flecha adicional que trae la tupla (i', j') con $1 \leq i' \leq k$ y $1 < j' \leq l$ que extiende la información desde una cruz (la posición de la flecha roja depende si i' es 1 o no, en el primer caso se tiene la baldosa de la izquierda, si $i' > 1$ se tiene la de la derecha):



ii. Si $j > 1$ son de la forma:



En el caso en que $i = 1$ además de la opción anterior la baldosa puede traer la siguiente flecha adicional con la tupla (i', j') que cumple $1 \leq i' \leq k$ y $1 \leq j' < l$ que extiende la información desde una cruz (la posición de la flecha roja depende si i' es 1 o no):

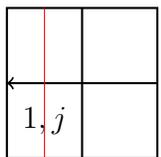


En total hay $(k - 1) + k(l - 1) + (k - 1)(l - 1) + k(l - 1)^2$ baldosas de este tipo, donde cada término de la suma anterior representa las cuatro posibilidades

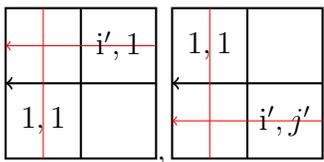
de líneas horizontales mostradas antes de manera ordenada. Sumando todo se obtienen en total $l(kl - 1)$ baldosas de este tipo.

- (b) Unión vertical: de manera similar a las uniones horizontales, llevan consigo una tupla (i, j) con $1 \leq i \leq k$ y $1 \leq j < l$ pero acá significa que unen la flecha roja vertical que trae el símbolo (i, j) con la flecha roja vertical que trae $(i, j + 1)$. Dependiendo de los valores de (i, j) pueden tomar formas distintas:

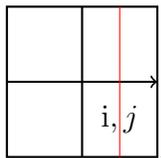
- i. Si $i = 1$ son de la forma:



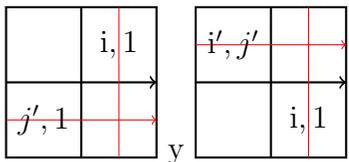
Si además se cumple que $j = 1$ la baldosa puede incluir la siguiente flecha adicional que trae la tupla (i', j') con $1 < i' \leq k$ y $1 \leq j' \leq l$ que extiende la información desde una cruz (la posición de la flecha roja depende si j' es 1 o no):



- ii. Si $i > 1$ son de la forma:



Si además se cumple que $j = 1$ la baldosa puede incluir la siguiente flecha adicional que trae la tupla (i', j') con $1 \leq i' < k$ y $1 \leq j' \leq l$ que extiende la información desde una cruz (la posición de la flecha roja depende si j' es 1 o no):



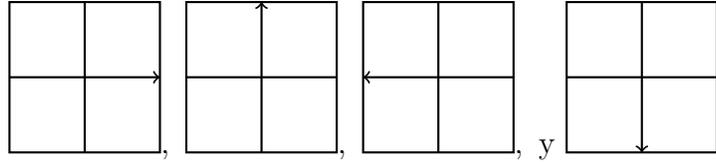
Hay $(l - 1) + (k - 1)l + (k - 1)(l - 1) + (k - 1)^2l$ baldosas de este tipo, donde cada término de la suma anterior representa las cuatro posibilidades de líneas verticales mostradas antes de manera ordenada. Sumando todo se obtienen en total $k(kl - 1)$ baldosas de este tipo.

Es posible de interpretar las tuplas como que ahora cada flecha roja realmente es de un color distinto que es identificado por su tupla, y que las líneas de unión realmente cambian de color al cruzar la línea negra. Sin embargo se prefiere dejar la notación actual para no sobrecargar de notación a las baldosas.

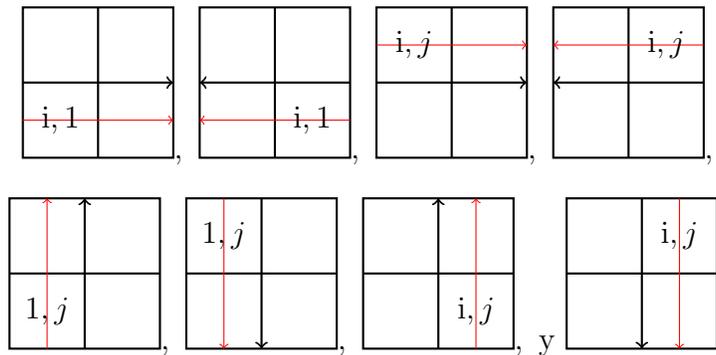
Hay en total $(k + l)(kl - 1)$ baldosas de unión distintas. Notemos que para el caso en que $(k, l) = (2, 2)$ hay 12 baldosas de unión en total, al igual que en el shift de Robinson usual.

3. **Baldosas de extensión:** Al igual que en el shift de Robinson, son baldosas que cumplen la función de extender la información desde las cruces, los hay de dos tipos:

- (a) Las primeras solo extienden las líneas negras que se originan en las cruces, son iguales a las del shift de Robinsinon:



- (b) Las segundas además de extender la línea negra, llevan una tupla (i, j) con $1 \leq i \leq k$ y $1 \leq j \leq l$ que se origina en una cruz pueden ser horizontales y verticales y la forma en que se representan sigue la misma lógica que las líneas de unión. Es decir, las tuplas de las baldosas de la primera línea cumplen $1 \leq i < k$. Las dos primeras de ellas corresponden el caso $j = 1$ y las dos últimas al caso $1 < j \leq l$. Las tuplas de las baldosas de la segunda línea cumplen todas que $1 \leq j < l$. Las dos primeras de ellas corresponden al caso $i = 1$ y las dos últimas al caso $1 < i \leq k$.

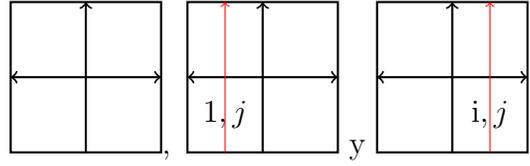


Tampoco este tipo de baldosas admite reflexiones o rotaciones. En total hay $4 + 2(k - 1) + 2(k - 1)(l - 1) + 2(l - 1) + 2(k - 1)(l - 1)$ baldosas de extensión. El primer término cuenta las cuatro baldosas que no llevan líneas rojas, y cada uno de los términos siguientes cuenta dos baldosas de las 8 mostradas en el dibujo. Juntando los términos se obtiene que hay $2(2kl - k - l + 2)$ baldosas de extensión. Nuevamente es importante notar que en el caso del shift de Robinson ese número se reduce a las 12 baldosas de extensión usuales.

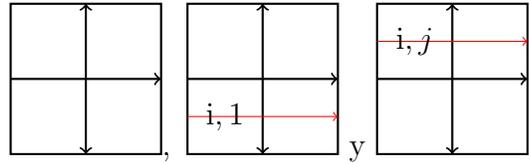
4. **Baldosas de relleno:** Este tipo de baldosa no tiene símil en el shift de Robinson. En el shift de Robinson generalizado se formarán supertiles que están formados por $k \cdot l$ supertiles de un nivel inferior, en consecuencia, si solo deseamos tener una baldosa que determine el supertile, el resto de las posiciones que se encuentran entre cuatro supertiles debe ser rellenada por algo. En esta construcción se elige de manera arbitraria entre las posiciones que están entre cuatro supertiles la que se encuentra más abajo y a la izquierda (más adelante se observan ejemplos donde se aprecia esto) y en consecuencia el resto de las posiciones se completa utilizando las baldosas de relleno. Tenemos tres tipos de ellas y los primeros dos tipos pueden llevar también la información de una línea roja que se origine en una cruz.

- (a) Estas baldosas rellenarán espacios directamente arriba de una cruz (solo aparecen si $l > 2$), pueden extender la tupla (i, j) que identifica la cruz para $1 \leq i \leq k$

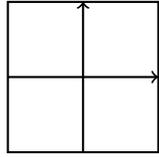
y $1 \leq j < l$. Nuevamente, donde se dibuje la línea que extiende la información depende de la tupla (i, j) (si $i = 1$ se dibuja a la izquierda y si $i > 1$ a la derecha).



- (b) Estas baldosas rellenan espacios directamente a la derecha de una cruz (aparecen solo si $k > 2$), también pueden extender tuplas (i, j) donde $1 \leq i < k$ y $1 \leq j \leq l$. Nuevamente la forma en que se representa la línea es para que extienda la información de la cruz, se representa de la forma de la izquierda si $j = 1$, y de la forma de la derecha si $j > 1$.



- (c) El resto de las baldosas de relleno simplemente rellena las posiciones que no están directamente arriba ni a la derecha de la cruz que identifica el supertile (aparecen solo si $k, l > 2$). Su única función es transmitir la información de las líneas negras.



Estas baldosas tampoco admiten rotaciones ni reflexiones. Para dar la cantidad de estas baldosas es necesario usar indicatrices. La cantidad total es:

$$(1 + k(l - 1))1_{\{l > 2\}} + (1 + (k - 1)l)1_{\{k > 2\}} + 1_{\{k > 2\}}1_{\{l > 2\}}$$

Obviamente en el caso en que $(k, l) = (2, 2)$ hay 0 baldosas de relleno.

De esta forma, sumando todos los números anteriores, el subshift $X_{\text{Rob}}(k, l)$ tendrá un alfabeto de tamaño:

$$k^2l + kl^2 + 5kl - 3k - 3l + 4 + (1 + k(l - 1))1_{\{l > 2\}} + (1 + (k - 1)l)1_{\{k > 2\}} + 1_{\{k > 2\}}1_{\{l > 2\}}$$

Las reglas de adyacencia de $X_{\text{Rob}}(k, l)$ son muy parecidas a las de X_{Rob} , es decir, tan sólo se pueden unir dos baldosas si tanto las líneas negras como las rojas coinciden (punta de flecha con cola de flecha). Además solo se podrán unir dos flechas rojas si coinciden los símbolos de ambas. En el caso de las baldosas de unión, se pueden unir dos flechas rojas mediante una baldosa de unión de acuerdo a la regla detallada en su definición (por ejemplo, una baldosa

de unión horizontal con el símbolo (2,3) una baldosa ubicada a la izquierda que trae una flecha con el símbolo (2,3) a una baldosa situada a la derecha cuya flecha acarrea el símbolo (3,3)). Además de estas reglas, del mismo modo que en X_{Rob} se fuerza a que en cada punto de $X_{\text{Rob}}(k, l)$ exista un 2-látice de cruces.

Cómo todas las reglas se pueden lograr prohibiendo un conjunto finito de patrones, entonces $\forall k, l \geq 2 : X_{\text{Rob}}(k, l)$ es un \mathbb{Z}^2 -SFT.

Algo interesante a notar, es que efectivamente $X_{\text{Rob}}(k, l)$ es una generalización de X_{Rob} dado que $X_{\text{Rob}}(2, 2)$ es simplemente una representación distinta de X_{Rob} . En efecto, una conjugación desde $X_{\text{Rob}}(2, 2)$ a X_{Rob} está dada por el código 1-bloque que simplemente borra las tuplas en todas las baldosas, dado que en el caso $(k, l) = (2, 2)$ esta aplicación es biyectiva.

A continuación se generaliza la noción de supertile para que tenga sentido en este nuevo contexto.

Definición 3.8 *Sea $n \in \mathbb{N}$ y k, l números naturales con $k, l \geq 2$. Se dice que un patrón del shift de Robinson generalizado $X_{\text{Rob}}(k, l)$ cuyo soporte es un rectángulo de tamaño $(2k^{n-1} - 1, 2l^{n-1} - 1)$ es un (k, l) -supertile de orden n (también se dice que es un (k, l) -supertile de nivel n) si se cumple lo siguiente:*

1. *En el caso $n = 1$, si la única baldosa del patrón es una cruz.*
2. *En el caso en que $n > 1$, si la baldosa de la posición $(2k^{n-2}, 2l^{n-2})$ (llamamos central a ésta posición) del patrón rectangular corresponde a una cruz, y el patrón está formado por un arreglo rectangular de $k \times l$ supertiles de nivel $n - 1$ separados a distancia 1 tales que las líneas rojas que se originan en las cruces de sus baldosas centrales se unen de la manera en que se muestra en la figura 3.10.*

En la figura 3.10 se puede observar bien la estructura de los (k, l) -supertiles de nivel n . La baldosa central (la de la posición $(2k^{n-2}, 2l^{n-2})$) está marcada con el símbolo \star y es la única posición donde se tiene libertad alguna para elegir una baldosa (solo se puede elegir una cruz) dentro del (k, l) -supertile de nivel n , el resto de las baldosas están determinadas por dicha elección. En total se tiene un arreglo de tamaño $k \times l$ de (k, l) -supertiles de nivel $n - 1$. Las baldosas que se encuentran entre cuatro (k, l) -supertiles de nivel $n - 1$ y no son la baldosa central están forzadas por las flechas negras a ser baldosas de relleno.

Utilizando el argumento anterior de manera inductiva se obtiene que $\forall n \geq 1$ la cantidad de (k, l) -supertiles de nivel n es exactamente $k \cdot l$, donde cada uno de estos está determinado por la cruz de la posición central. En la figura 3.11 se muestra un $(3, 2)$ -supertile de nivel 2 en $X_{\text{Rob}}(3, 2)$ y en la figura 3.12 un $(2, 3)$ -supertile de nivel 3 en $X_{\text{Rob}}(2, 3)$.

A continuación, al igual que en el caso del shift de Robinson se mostrará que para todo par de números naturales $k, l \geq 2$ se cumple que $X_{\text{Rob}}(k, l)$ no es vacío y que no contiene puntos periódicos

Proposición 3.9 *Para todo par de enteros $k, l \geq 2$ se cumple que $X_{\text{Rob}}(k, l) \neq \emptyset$.*

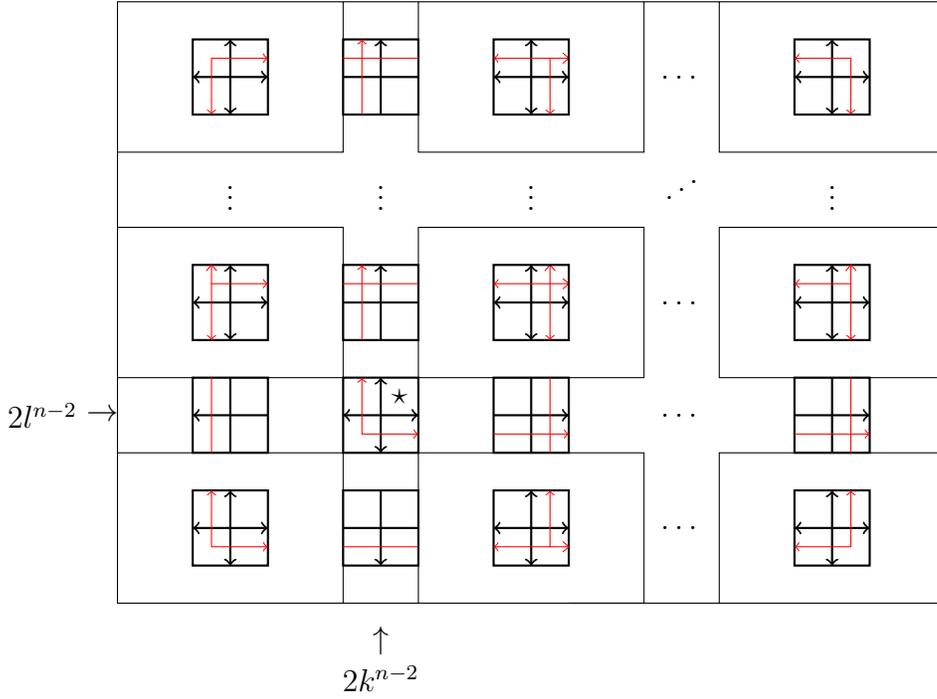


Figura 3.10: Estructura de un (k, l) -supertile de nivel $n \in \mathbb{N}$ en $X_{\text{Rob}}(k, l)$. Cada rectángulo representa un (k, l) -supertile de nivel $n - 1$. Se han omitido las tuplas por simplicidad.

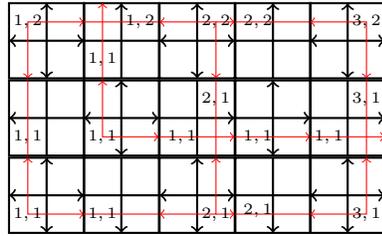


Figura 3.11: Un $(3,2)$ -supertile de orden 2 en $X_{\text{Rob}}(3, 2)$.

DEMOSTRACIÓN. La demostración es idéntica a la realizada en el caso del shift de Robinson, básicamente se tiene una secuencia de patrones localmente admisibles cuyo soporte crece hasta cubrir todo \mathbb{Z}^2 , se genera una secuencia de puntos que contienen dichos soportes y se prueba que cualquier punto de acumulación de dicha secuencia pertenece a $X_{\text{Rob}}(k, l)$.

Sea entonces una sucesión de puntos $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathcal{A}(X_{\text{Rob}}(k, l))^{\mathbb{Z}^2}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ la restricción de $x^{(n)}$ a Λ_n esté contenido en un (k, l) -supertile de nivel $n + 1$. Por compacidad existe una subsucesión que converge a un punto $\bar{x} \in \mathcal{A}(X_{\text{Rob}}(k, l))^{\mathbb{Z}^2}$. Como $\forall n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\bar{x}|_{\Lambda_n}$ está contenido en un (k, l) -supertile de nivel $n + 1$ que es un patrón admisible, se sigue que todo patrón $P \sqsubseteq \bar{x}$ es admisible y en consecuencia $\bar{x} \in X_{\text{Rob}}(k, l)$. \square

Proposición 3.10 Para cada par de enteros $k, l \geq 2$, todo punto de $X_{\text{Rob}}(k, l)$ contiene (k, l) -supertiles de nivel arbitrariamente grande.

DEMOSTRACIÓN. La prueba de esta afirmación es extremadamente similar a la que se hace en

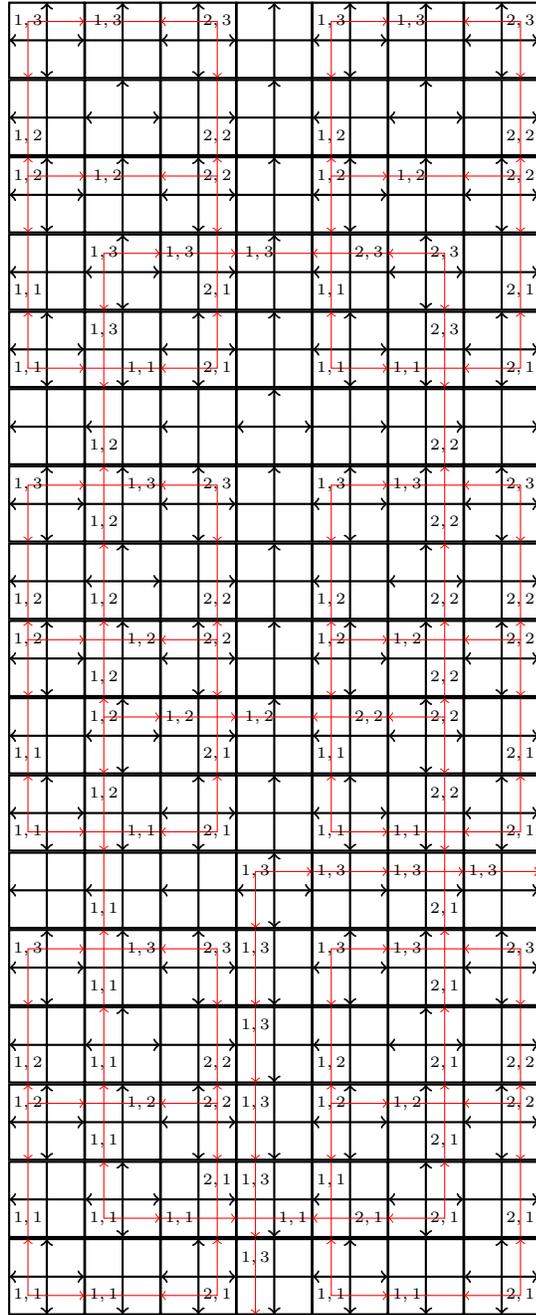


Figura 3.12: Un $(2,3)$ -supertile de orden 3 en $X_{\text{Rob}}(2,3)$.

el caso de X_{Rob} , por lo cual se omite dar un exceso de detalles. En primer lugar sea $x \in X_{\text{Rob}}(k,l)$ y consideramos una cruz de su 2-látice de cruces. Mostremos que necesariamente debe estar contenida en un (k,l) -supertile de nivel 2. En efecto, se sigue el mismo esquema de demostración que se detalla en la figura 3.8. Las líneas rojas que se originan en esta cruz necesariamente deben extenderse, luego, dado que la cruz está en el 2-látice de cruces, la única posibilidad es que aparezcan rectangularmente ordenadas todas las cruces que se identifican con las tuplas en $R[k,l]$ en el 2-látice. Luego de esto, la única opción es que dichas cruces se unan mediante baldosas de unión. Finalmente, gracias a la estructura de las flechas negras se determina que la baldosa central de este arreglo debe ser una cruz. La cruz de esta posición

inmediatamente termina de determinar la forma de las baldosas de unión y fuerza a que el resto de baldosas desconocidas sean de relleno. De esta forma la estructura encontrada es un supertile de nivel 2. En la figura 3.13 se muestra el detalle de ésta deducción para el caso $(k, l) = (2, 3)$

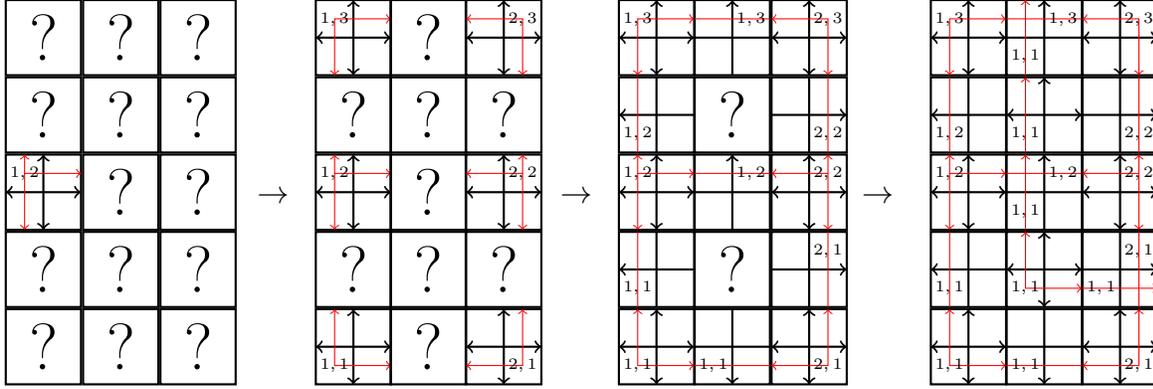


Figura 3.13: Esquema de deducción que cada cruz debe estar en un (k, l) -supertile de nivel 2 para el caso $(k, l) = (2, 3)$.

El paso inductivo es bastante similar, sea $n \geq 3$ y consideremos un (k, l) -supertile de nivel $n - 1$ que contenga la cruz inicial del 2-látice. Un argumento combinatorial similar al anterior muestra que necesariamente debe estar dentro de un arreglo rectangular de (k, l) -supertiles de nivel $n - 1$ que se unen a la flechas que salen de la cruz que está en su baldosa central mediante baldosas de unión. Nuevamente los centros de dichos (k, l) -supertiles de nivel $n - 1$ deben estructurarse rectangularmente (tal como las cruces en el caso base). Los espacios indeterminados aún entre cada par de (k, l) -supertiles de nivel $n - 1$ solo pueden ser rellenados con baldosas de extensión, hasta llegar a los espacios que se encuentran entre cuatro (k, l) -supertiles de nivel $n - 1$. En la posición central de este arreglo rectangular las líneas negras fuerzan que aparezca una cruz, la cual determina el resto de las baldosas mostrando que la estructura formada es un (k, l) -supertile de nivel n .

□

Proposición 3.11 *Para cada par de enteros $k, l \geq 2$ se tiene que $X_{Rob}(k, l)$ no contiene puntos periódicos.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $x \in X_{Rob}(k, l)$ es un punto periódico y sea $z := (z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$ tal que $\sigma^z(x) = x$. Consideremos algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $\min(2k^{n-1} - 1, 2l^{n-1} - 1) > \max(|z_1|, |z_2|)$. En virtud de la proposición 3.10 se sabe que x contiene un (k, l) -supertile de nivel n , el cual no puede quedar fijo bajo la acción de σ^z generando una contradicción.

□

En virtud de lo anterior, se ha mostrado que el shift de Robinson generalizado comparte las mismas propiedades del shift de Robinson. En particular, tiene la misma estructura en el sentido de que cada punto puede estar formado por hasta cuatro (k, l) -supertiles de nivel infinito (la misma definición de antes solo que formados por (k, l) -supertiles).

De esta manera, para todo par de enteros $k, l \geq 2$ es posible que en los puntos de $X_{\text{Rob}}(k, l)$ aparezcan líneas de falla. Del mismo modo que en el shift de Robinson lo anterior motiva la siguiente definición.

Definición 3.12 Sean números enteros $k, l \geq 2$. Se dice que un punto $x \in X_{\text{Rob}}(k, l)$ es de tipo *látice* si $\forall n \in \mathbb{N}$ hay un $(2k^{n-1}, 2l^{n-1})$ -látice tal que x restringido al látice contiene únicamente cruces que son centros de (k, l) -supertiles de nivel n .

Definición 3.13 Sean números enteros $k, l \geq 2$. Se define a $X_{\text{Rob}}^{\min}(k, l)$ como el conjunto de todos los puntos tipo *látice* contenidos en $X_{\text{Rob}}(k, l)$.

Teorema 3.14 Sean $k, l \geq 2$. El conjunto $X_{\text{Rob}}^{\min}(k, l)$ es el único subsistema minimal de $X_{\text{Rob}}(k, l)$.

DEMOSTRACIÓN. La demostración es idéntica a la del teorema 3.7, es decir, basta notar que en virtud de la proposición 3.10 en cualquier punto de $X_{\text{Rob}}(k, l)$ aparecen supertiles de nivel arbitrario los cuales se pueden ver como patrones dentro de puntos de $X_{\text{Rob}}^{\min}(k, l)$. En consecuencia los puntos de $X_{\text{Rob}}^{\min}(k, l)$ son puntos de acumulación de cualquier punto en $X_{\text{Rob}}(k, l)$. \square

Con esto se concluye el estudio de este sistema generalizado. En lo que resta de este capítulo se mostrará que los sistemas minimales X_{Rob}^{\min} y $X_{\text{Rob}}^{\min}(k, l)$ son \mathbb{Z}^2 -subshifts sóficos.

3.4. X_{Rob}^{\min} y $X_{\text{Rob}}^{\min}(k, l)$ son \mathbb{Z}^2 -subshifts de tipo sófico.

En esta última sección se muestra que los subshifts minimales X_{Rob}^{\min} y $X_{\text{Rob}}^{\min}(k, l)$ son \mathbb{Z}^2 -subshifts de tipo sófico para todo par de enteros $k, l \geq 2$. Solo se realizará la demostración en el caso general, dado que el shift de Robinson puede ser visto como un caso particular. Luego de eso se le dará especial atención al caso del shift de Robinson usual para mostrar una propiedad que será útil en el capítulo 5.

La demostración presentada en esta sección está influenciada por una presentación de M. Sablik durante la conferencia: *floripadynsys : Workshop on Dynamics, Numeration and Tilings 4-8 Nov. 2013 Florianopolis (Brazil)*. La idea es generar una extensión del shift de Robinson generalizado añadiendo decoraciones a las baldosas de modo que se obligue a que los puntos sean de tipo *látice*.

Sean números naturales $k, l \geq 2$. A partir de $X_{\text{Rob}}(k, l)$ se genera un nuevo \mathbb{Z}^2 -SFT que es denotado $X_{\text{Rob}}^{\text{dec}}(k, l)$ y se constituye por baldosas de $X_{\text{Rob}}(k, l)$ que se modifican mediante la adición de líneas decorativas. Las líneas decorativas restringen aún más las reglas de adyacencia en el shift de Robinson generalizado y obligan a que todos los puntos sean de tipo *látice*. A $X_{\text{Rob}}^{\text{dec}}(k, l)$ se le denomina shift de Robinson decorado generalizado.

Por simplicidad, no se muestra acá el conjunto completo de baldosas modificadas, sino que simplemente se explica como obtenerlas a partir de $X_{\text{Rob}}(k, l)$. Las líneas decorativas se representan visualmente como líneas punteadas azules.

En primer lugar, se comienza modificando algunas cruces de $X_{\text{Rob}}(k, l)$. Solo se modifican las cruces cuya tupla identificadora se encuentra en los extremos de $R[k, l]$. En la figura 3.14 se muestran las cruces de $X_{\text{Rob}}(k, l)$ que sufren modificaciones, la regla general es que en el vértice donde se originan las líneas rojas se añaden líneas decorativas que se extienden en las direcciones en que no hay líneas rojas (el detalle se observa en la figura 3.14).

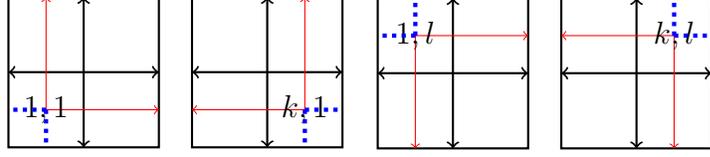


Figura 3.14: Las cruces modificadas de $X_{\text{Rob}}^{\text{dec}}(k, l)$.

La idea tras agregar estas líneas a las cruces, es que si no es posible doblarlas o originarlas en ninguna otra baldosa, entonces necesariamente cada línea debe necesariamente extenderse de manera infinita o unir dos cruces de la forma explicada anteriormente en cada punto de $X_{\text{Rob}}^{\text{dec}}(k, l)$. En consecuencia al resto de las baldosas (no cruces) se permite agregarles líneas azules (a lo más una línea vertical y una línea horizontal por baldosa, de la manera que se muestra en la figura 3.15).

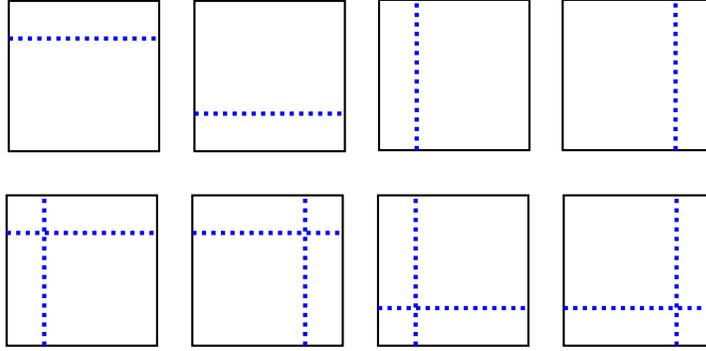


Figura 3.15: A cada baldosa de $X_{\text{Rob}}(k, l)$ que no sea una cruz, se permite agregarle una línea horizontal y una línea vertical de una de las formas mostradas acá.

Agregando la regla de que cada par de baldosas adyacentes debe cumplir que sus líneas azules punteadas, de existir, deben calzar en el borde donde se unen las baldosas, se define para cada par de números naturales $k, l \geq 2$ un \mathbb{Z}^2 -SFT denominado $X_{\text{Rob}}^{\text{dec}}(k, l)$. En la figura 3.16 se muestra un ejemplo de un $(2, 3)$ -supertile de nivel 3 en $X_{\text{Rob}}^{\text{dec}}(2, 3)$.

A continuación se mostrará que $X_{\text{Rob}}^{\text{dec}}(k, l)$ es una extensión de $X_{\text{Rob}}^{\text{min}}(k, l)$.

Teorema 3.15 *Para cada par de enteros positivos $k, l \geq 2$, se tiene que $X_{\text{Rob}}^{\text{min}}(k, l)$ es un \mathbb{Z}^2 -subshift de tipo sófico.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, para demostrar que $X_{\text{Rob}}^{\text{min}}(k, l)$ es un \mathbb{Z}^2 -subshift de tipo sófico se muestra que $X_{\text{Rob}}^{\text{dec}}(k, l)$ es una extensión de $X_{\text{Rob}}^{\text{min}}(k, l)$. Para realizar a cabo esto se define en primer lugar a $\phi : X_{\text{Rob}}^{\text{dec}}(k, l) \rightarrow X_{\text{Rob}}(k, l)$ el código de la ventana deslizante (1-bloque) que borra las líneas decorativas en cada baldosa. En primer lugar se muestra que cada elemento de $X_{\text{Rob}}^{\text{min}}(k, l)$ admite una preimágen.

un punto tipo láctice en $\phi(X_{\text{Rob}}^{\text{dec}}(k, l))$. Como $X_{\text{Rob}}^{\text{min}}(k, l)$ el conjunto de los puntos tipo láctice es minimal y ϕ es una función continua y que conmuta con el shift, entonces necesariamente $X_{\text{Rob}}^{\text{min}}(k, l) \subseteq \phi(X_{\text{Rob}}^{\text{dec}}(k, l))$.

□

Ahora se muestra que $\phi(X_{\text{Rob}}^{\text{dec}}(k, l))$ contiene solo puntos de tipo láctice.

Lema 3.17 *Para todo $x \in X_{\text{Rob}}^{\text{dec}}(k, l)$ se cumple que $\phi(x)$ es un punto de tipo láctice.*

DEMOSTRACIÓN. El argumento es inductivo. Sea $x \in X_{\text{Rob}}^{\text{dec}}(k, l)$. Las reglas del shift de Robinson generalizado fuerzan la aparición de un 2 -láctice de cruces. Mostremos primero que hay un $(2k, 2l)$ -láctice de cruces que son centros de (k, l) -supertiles de nivel 2 . En efecto, sea $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$ tal que existe un (k, l) -supertile de nivel 2 cuya cruz central se ubica en la posición z . Las cruces que se ubican en sus cuatro esquinas llevan líneas azules, lo cual fuerza que las cruces que se encuentran adyacentes en el 2 -láctice pero no en el supertile sean las que aparecen en la figura 3.17. Continuando el argumento, dichas cruces fuerzan la aparición de (k, l) -supertiles de nivel 2 . De este modo se fuerza la aparición de cruces que son centrales para dichos supertiles en las posiciones $(z_1 - 2k, z_2)$, $(z_1 + 2k, z_2)$, $(z_1, z_2 + 2l)$ y $(z_1, z_2 - 2l)$. Si se extiende el argumento sobre todas estas baldosas se obtiene que hay un $(2k, 2l)$ -láctice de cruces que son centros de (k, l) -supertiles de nivel 2 .

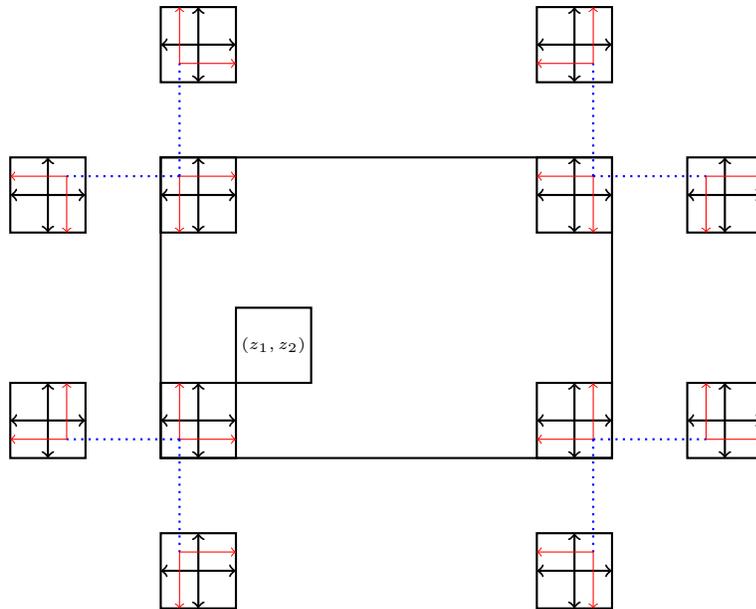


Figura 3.17: Esquema de demostración. Las cruces de las esquinas de un supertile fuerzan que las cruces fuera de éste también estén coordinadas. La cruz central del supertile está ubicada en la coordenada $(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$

Ahora se procede por inducción. Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$ y supóngase que existe un $(2k^{n-2}, 2l^{n-2})$ -láctice de cruces que son centros de (k, l) -supertiles de nivel $n - 1$. Sea nuevamente $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$ tal que existe un (k, l) -supertile de nivel n cuya cruz central se

ubica en la posición z . Los (k, l) -supertiles de nivel $n - 1$ que se ubican en sus cuatro esquinas tienen baldosas centrales en el $(2k^{n-2}, 2l^{n-2})$ -látice de cruces y llevan líneas azules, lo cual fuerza que las cruces que son centros de (k, l) -supertiles de nivel $n - 1$ que se encuentran adyacentes en el $(2k^{n-2}, 2l^{n-2})$ -látice pero no en el (k, l) -supertile de nivel n sean de la misma forma que las que aparecen en la figura 3.17 solo que ahora son centros de supertiles en vez de cruces por si solas. Repitiendo el argumento anterior, dichas cruces obligan la aparición de (k, l) -supertiles de nivel n cuyos centros están alineados. De este modo se fuerza la aparición de cruces que son centrales para dichos supertiles en las posiciones $(z_1 - 2k^{n-1}, z_2), (z_1 + 2k^{n-1}, z_2), (z_1, z_2 + 2l^{n-1})$ y $(z_1, z_2 - 2l^{n-1})$. Si se extiende el argumento sobre todas estas baldosas se obtiene que hay un $(2k^{n-1}, 2l^{n-1})$ -látice de cruces que son centros de (k, l) -supertiles de nivel n . Esto termina la demostración. □

Utilizando los dos lemas anteriores, se tiene que el código 1-bloque $\phi : X_{\text{Rob}}^{\text{dec}}(k, l) \rightarrow X_{\text{Rob}}^{\text{min}}(k, l)$ que elimina las decoraciones azules de cada baldosa, da un código factor. En consecuencia de lo anterior se obtiene que $X_{\text{Rob}}^{\text{min}}(k, l)$ admite una extensión SFT, lo cual concluye la demostración del teorema. □

En particular tomando $(k, l) = (2, 2)$ y aplicando la conjugación que borra las tuplas en cada baldosa, se obtiene el siguiente corolario:

Corolario 3.18 $X_{\text{Rob}}^{\text{min}}$ es un \mathbb{Z}^2 -subshift de tipo sófico.

Hasta ahora la definición de $X_{\text{Rob}}^{\text{dec}}$ ha sido un poco ambigua con la forma en que las líneas azules aparecen en el resto de las baldosas (extensión y unión). Esto principalmente pues para la demostración anterior no eran necesarios estos detalles. Sin embargo es necesario poner una restricción extra para asegurar un resultado que es de gran utilidad en el capítulo 5.

La restricción extra es la siguiente: Cada baldosa de extensión o de unión debe llevar tanto una línea vertical como una horizontal, ya sea roja o azul. Es decir, si la baldosa antes de la decoración no trae una línea roja vertical o horizontal, entonces deben agregársele líneas azules de la forma en que se muestra en la figura 3.15.

La restricción anteriormente definida solo disminuye el número de símbolos, es decir, la cardinalidad del alfabeto es más pequeño pero no añade restricciones locales. Es decir, en este nuevo alfabeto más pequeño no hay restricciones adicionales a las anteriores para definir $X_{\text{Rob}}^{\text{dec}}$. De hecho, dentro de un supertile de nivel infinito de $X_{\text{Rob}}^{\text{dec}}$, esta regla no agrega nada nuevo, es decir, ya era forzada por las cruces dentro de cada supertile. Lo que asegura la nueva restricción es que localmente cada patrón pueda verse como subpatrón de un supertile suficientemente grande. Es decir, se tiene la siguiente proposición:

Proposición 3.19 Para cada patrón $P \in \mathcal{L}(X_{\text{Rob}}^{\text{dec}})$ existe $n \in \mathbb{N}$ y un supertile decorado Π de orden $n \in \mathbb{N}$ tal que $P \sqsubseteq \Pi$.

En consecuencia, todo patrón globalmente admisible de $X_{\text{Rob}}^{\text{dec}}$ es posible encontrarlo dentro de algún supertile suficientemente grande. La misma propiedad no es válida en el caso de X_{Rob} debido a la existencia de las líneas de falla que permiten la aparición de patrones localmente admisibles que no son subpatrones de algún supertile. Este resultado es de vital importancia para una construcción que se realiza en el capítulo 5.

Capítulo 4

Una versión del teorema de Mozes para \mathbb{Z}^2 -subshifts límites generados por sustituciones rectangulares

El objetivo de este capítulo es entregar una extensión del teorema de Mozes descrito en 2.11 para el caso de \mathbb{Z}^2 -subshifts límites generados por sustituciones rectangulares. Una demostración de dicho teorema para el caso de \mathbb{Z}^2 -sustituciones cuadradas de tamaño 2 ya ha sido probada recientemente en [16]. En primer lugar, se entregará una demostración alternativa de dicho teorema para sustituciones cuadradas de tamaño 2 y posteriormente se generalizará esta demostración para el caso de \mathbb{Z}^2 -sustituciones rectangulares de cualquier tamaño.

Las demostraciones presentadas a continuación consisten en encontrar explícitamente una extensión para los subshifts límites X_s^l donde s es una \mathbb{Z}^2 -sustitución rectangular que actúa sobre un alfabeto finito \mathcal{A} . Para ello se utilizan las estructuras de X_{Rob}^{\min} y $X_{\text{Rob}}^{\min}(k, l)$ junto con un \mathbb{Z}^2 -SFT cuyas reglas provienen de la \mathbb{Z}^2 -sustitución s que se desea codificar. A partir de estos dos elementos se genera una estructura que permite codificar un punto x de X_s^l junto a todo su pasado infinito de preimágenes bajo la acción de s , es decir, la secuencia de puntos $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0} \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ tal que $x = x^{(0)}$ y $\forall j \in \mathbb{N}_0 \exists z^{(j)} \in \mathbb{Z}^2$ tal que $x^{(j)} = \sigma^{z^{(j)}} \circ s(x^{(j+1)})$ cuya existencia está garantizada por la proposición 2.10. Posterior a ello mediante la obtención de un 2-higher power de dicha estructura se procede a definir un factor hacia X_s^l , lo cual muestra que dicho \mathbb{Z}^2 -subshift es sófico.

Por razones pedagógicas, se presenta primero el caso particular donde la \mathbb{Z}^2 -sustitución s es cuadrada de tamaño 2 y posteriormente se generaliza a \mathbb{Z}^2 -sustituciones rectangulares arbitrarias.

4.1. Construcción de una extensión SFT para \mathbb{Z}^2 -subshifts límites generados por \mathbb{Z}^2 -sustituciones cuadradas de tamaño 2

Sea s una \mathbb{Z}^2 -sustitución cuadrada de tamaño 2 que actúa sobre un alfabeto finito \mathcal{A} , y considérese además el subshift límite generado por s , es decir, el conjunto:

$$X_s^l := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Orb}_\sigma(s^n(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d})).$$

El objetivo de esta sección es probar que X_s^l es un \mathbb{Z}^2 -subshift de tipo sófico. Para realizar dicho propósito es conveniente introducir primero una nueva \mathbb{Z}^2 -sustitución s_H que extiende a s en el sentido de que para $a \in \mathcal{A}$ se tiene que para $n \in \mathbb{N}$, $s_H^n(a)$ contiene los símbolos ordenados de $s^n(a)$ pero además contiene $\forall 0 \leq m \leq n$ la información de $s^m(a)$. Posteriormente utilizando estructuras locales de dicha \mathbb{Z}^2 -sustitución se define un \mathbb{Z}^2 -SFT Y , el cual es utilizado junto al shift de Robinson para generar un subshift X_s^H que es subconjunto del producto $X_{\text{Rob}}^{\min} \times Y$ y que permite generar la extensión buscada tomando su 2-higher power.

La sustitución s_H se define sobre un alfabeto \mathcal{A}_H que extiende al alfabeto \mathcal{A} . Lamentablemente esta \mathbb{Z}^2 -sustitución no es rectangular, sin embargo para los propósitos que la necesitamos, es compatible con la concatenación. En primer lugar se describe el alfabeto \mathcal{A}_H y luego se detallan sus reglas y se explica su utilidad. Los elementos de \mathcal{A}_H son representados como baldosas y se pueden presentar en las siguientes clases:

1. **Símbolos:** Corresponden a los símbolos de \mathcal{A} . Por cada $a \in \mathcal{A}$ se representa su baldosa asociada en \mathcal{A}_H como:

$$\boxed{a}$$

Su función es guardar la información de $s^n(\cdot)$ para $n \in \mathbb{N}$ en $s_H^n(\cdot)$.

2. **Reglas:** Por cada regla de sustitución en s de la forma $a \xrightarrow{s} \begin{matrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{matrix}$ existe en \mathcal{A}_H una baldosa que contiene dicha información. Tal baldosa se representa de la siguiente forma:

$$\boxed{a \begin{matrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{matrix}}$$

Su función es guardar la información de $s^m(\cdot) \forall 0 \leq m < n$ y para $n \in \mathbb{N}$ en $s_H^n(\cdot)$. El símbolo $a \in \mathcal{A}$ a la izquierda de la baldosa se denomina el símbolo asociado a la regla.

3. **Líneas normales:** Por cada tripleta de símbolos $(a, b, c) \in \mathcal{A}^3$, tenemos en \mathcal{A}_H las baldosas:

$$\boxed{\begin{matrix} & b \\ a & \\ & c \end{matrix}} \text{ y } \boxed{\begin{matrix} & b \\ & a \\ & c \end{matrix}}$$

Es decir, pueden ser tanto horizontales como verticales. Su función consiste en asegurar la consistencia de los patrones que corresponden a una iteración de la sustitución s y la de traspasar la información a patrones cuadrados más grandes.

4. **Líneas de extensión:** Por cada tripleta de símbolos $(a, b, c) \in \mathcal{A}^3$ aparecen en \mathcal{A}_H las baldosas:

$$\begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline a \\ \hline c \\ \hline \end{array} \text{ y } \begin{array}{|c|} \hline \vdots \\ \hline b \\ \hline a \\ \hline c \\ \hline \end{array}.$$

Su función es transmitir información desde las reglas hacia los extremos de los bloques y las líneas de unión.

5. **Líneas dobles:** Por cada tripleta de símbolos $(a, b, c) \in \mathcal{A}^3$ también están las siguientes baldosas en \mathcal{A}_H :

$$\begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline a \\ \hline c \\ \hline \end{array} \text{ y } \begin{array}{|c|} \hline \vdots \\ \hline b \\ \hline a \\ \hline c \\ \hline \end{array}.$$

Su función es idéntica a la de las líneas de extensión y solo están para darle consistencia a la concatenación dentro de la sustitución s_H . Éste último objetivo se puede observar con claridad más adelante, donde se detallan las reglas de la sustitución s_H .

6. **Líneas de unión:** Por cada tripleta de símbolos $(a, b, c) \in \mathcal{A}^3$, se tienen en \mathcal{A}_H las baldosas:

$$\begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline a \\ \hline c \\ \hline \end{array} \text{ y } \begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline a \\ \hline c \\ \hline \end{array}.$$

Su función es conectar la información de bloques adyacentes de manera consistente.

De esta manera, solo resta definir las reglas de la sustitución s_H . A diferencia de las sustituciones definidas anteriormente en la memoria, ésta no es rectangular, de hecho, no existe un único soporte $S \subsetneq \mathbb{Z}^2$ finito tal que $s_H(\mathcal{A}_H) \subseteq (\mathcal{A}_H)^S$, sin embargo veremos que para los efectos que la utilizaremos, es completamente consistente con la concatenación. Las reglas de s_H son las siguientes:

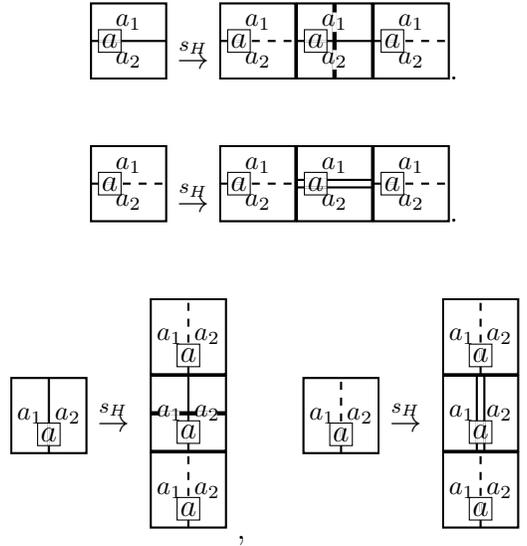
1. Por cada regla en s de la forma $a \xrightarrow{s} \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{array}$ se tiene en s_H la regla:

$$\begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} \xrightarrow{s_H} \begin{array}{|c|c|c|} \hline a_1 & \begin{array}{|c|} \hline a_1 \\ \hline a \\ \hline a_3 \end{array} & a_2 \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline a_1 \\ \hline a \\ \hline a_3 \end{array} & a^{-a_1 a_2} \\ \hline a_3 & \begin{array}{|c|} \hline a_1 \\ \hline a \\ \hline a_3 \end{array} & a_4 \\ \hline \end{array}.$$

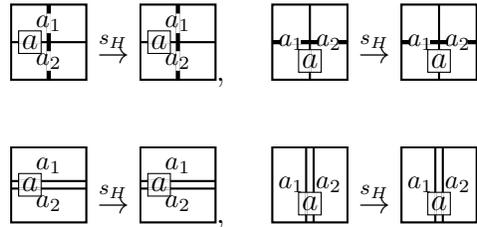
2. Las baldosas que se denominan reglas se mantienen fijas bajo la sustitución s_H es decir:

$$\begin{array}{|c|} \hline a^{-a_1 a_2} \\ \hline a \\ \hline a_3 a_4 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{s_H} \begin{array}{|c|} \hline a^{-a_1 a_2} \\ \hline a \\ \hline a_3 a_4 \\ \hline \end{array}.$$

3. Las baldosas que tienen líneas normales ó de extensión se reemplazan por un arreglo de tres baldosas de la siguiente forma:



4. Las baldosas que tienen líneas de unión ó líneas dobles también se mantienen fijas:



Además, las sustituciones se ordenan en \mathbb{Z}^2 de modo tal que la sustitución s_H aplicada n veces, donde $n \in \mathbb{N}$ a un símbolo $a \in \mathcal{A}$ sea un patrón cuyo soporte es un cuadrado de tamaño $2^{n+1} - 1$. En lo anterior se observa que la única utilidad de las baldosas con líneas dobles es dar consistencia a la concatenación, es decir, que las líneas de extensión puedan extenderse al tamaño adecuado en s_H .

Definición 4.1 Dada una sustitución s cuadrada de tamaño 2 sobre un alfabeto \mathcal{A} decimos que s_H es la sustitución jerárquica sobre \mathcal{A}_H asociada a s .

Ejemplo : La sustitución s_H aplicada dos veces a un símbolo $a \in \mathcal{A}$ que de acuerdo a las reglas de la \mathbb{Z}^2 -sustitución s cumpla que

$$a \xrightarrow{s} \begin{matrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{matrix} \text{ y que } a_1 \xrightarrow{s} \begin{matrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{matrix}, \quad a_2 \xrightarrow{s} \begin{matrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{matrix}, \quad a_3 \xrightarrow{s} \begin{matrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{matrix}, \quad a_4 \xrightarrow{s} \begin{matrix} e_1 & e_2 \\ e_3 & e_4 \end{matrix}.$$

Genera un patrón cuyo soporte es un cuadrado de tamaño $7 = 2^{2+1} - 1$ y es la forma que se muestra en la figura 4.1.

El hecho de que para $a \in \mathcal{A}$, $s_H^n(a)$ contenga la información de $s^m(a)$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$ con $0 \leq m \leq n$ permite tener suficiente información para crear la extensión de X_s^l , sin embargo, aún falta una estructura para poder tener los patrones que aparecen en las iteraciones de s_H sobre un símbolo de \mathcal{A} en un \mathbb{Z}^2 -subshift de tipo sófico. Es ahí donde entra la utilidad del shift de Robinson minimal $X_{\text{Rob}}^{\text{min}}$, el cual fue estudiado en el capítulo 3. Para

b_1	$b_1 \downarrow \begin{array}{ c } \hline a_1 \\ \hline \end{array} b_2$	b_2	$a_1 \downarrow \begin{array}{ c } \hline a_2 \\ \hline \end{array} a_2$	c_1	$c_1 \downarrow \begin{array}{ c } \hline a_2 \\ \hline \end{array} c_2$	c_2
$\begin{array}{ c } \hline b_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline a_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline b_3 \\ \hline \end{array}$	$a_1 \rightarrow \begin{array}{ c } \hline b_1 b_2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline b_3 b_4 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline b_2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline a_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline b_4 \\ \hline \end{array}$	$a_1 \downarrow \begin{array}{ c } \hline a_2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline a_2 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline c_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline a_2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline c_3 \\ \hline \end{array}$	$a_2 \rightarrow \begin{array}{ c } \hline c_1 c_2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline c_3 c_4 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline c_2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline a_2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline c_4 \\ \hline \end{array}$
b_3	$b_3 \downarrow \begin{array}{ c } \hline a_1 \\ \hline \end{array} b_4$	b_4	$a_1 \downarrow \begin{array}{ c } \hline a_2 \\ \hline \end{array} a_2$	c_3	$c_3 \downarrow \begin{array}{ c } \hline a_2 \\ \hline \end{array} c_4$	c_4
$\begin{array}{ c } \hline a_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline a_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline a_3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline a_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline a_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline a_3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline a_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline a_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline a_3 \\ \hline \end{array}$	$a_1 \rightarrow \begin{array}{ c } \hline a_1 a_2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline a_3 a_4 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline a_2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline a_2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline a_4 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline a_2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline a_2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline a_4 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline a_2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline a_2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline a_4 \\ \hline \end{array}$
d_1	$d_1 \downarrow \begin{array}{ c } \hline a_3 \\ \hline \end{array} d_2$	d_2	$a_3 \downarrow \begin{array}{ c } \hline a_4 \\ \hline \end{array} a_4$	e_1	$e_1 \downarrow \begin{array}{ c } \hline a_4 \\ \hline \end{array} e_2$	e_2
$\begin{array}{ c } \hline d_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline a_3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline d_3 \\ \hline \end{array}$	$a_3 \rightarrow \begin{array}{ c } \hline d_1 d_2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline d_3 d_4 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline d_2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline a_3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline d_4 \\ \hline \end{array}$	$a_3 \downarrow \begin{array}{ c } \hline a_4 \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline a_4 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline e_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline a_4 \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline e_3 \\ \hline \end{array}$	$a_4 \rightarrow \begin{array}{ c } \hline e_1 e_2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline e_3 e_4 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline e_2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline a_4 \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline e_4 \\ \hline \end{array}$
d_3	$d_3 \downarrow \begin{array}{ c } \hline a_3 \\ \hline \end{array} d_4$	d_4	$a_3 \downarrow \begin{array}{ c } \hline a_4 \\ \hline \end{array} a_4$	e_3	$e_3 \downarrow \begin{array}{ c } \hline a_4 \\ \hline \end{array} e_4$	e_4

Figura 4.1: El resultado de aplicar la sustitución s_H dos veces al símbolo $a \in \mathcal{A}$.

poder sacar provecho de su estructura es necesario antes introducir un \mathbb{Z}^2 -SFT auxiliar que rescata las propiedades esenciales de s_H .

Definición 4.2 Se define a $Y_s \subseteq (\mathcal{A}_H)^{\mathbb{Z}^2}$ el \mathbb{Z}^2 -SFT auxiliar asociado a s mediante una serie de restricciones locales que aparecen dentro de patrones finitos de la forma $s_H^n(a)$ con $a \in \mathcal{A}$ y $n \in \mathbb{N}$. La restricción 0 asegura que exista un 2-látice compuesto únicamente de baldosas con símbolos, las restricciones 1 a 4 son positivas en el sentido que fuerzan la aparición de los patrones que se muestran en ellas. La restricción 5 prohíbe la aparición de los patrones que en ella se describen. A continuación se listan dichas restricciones.

Restricción 0: para cada punto $y \in Y_s$ debe existir un 2-látice $L \subsetneq \mathbb{Z}^2$ tal que $y|_L$ está compuesto únicamente de símbolos e $y|_{\mathbb{Z}^2 \setminus L}$ no contiene símbolos.

La restricción anterior se puede obtener fácilmente mediante restricciones finitas de un modo similar al empleado para obtener un 2-látice de cruces en X_{Rob} . Esto se muestra en la figura 4.2 donde las baldosas que llevan símbolos se denotan mediante cuadrados negros y los cuadrados blancos representan cualquier baldosa de \mathcal{A}_H que no sea un símbolo.

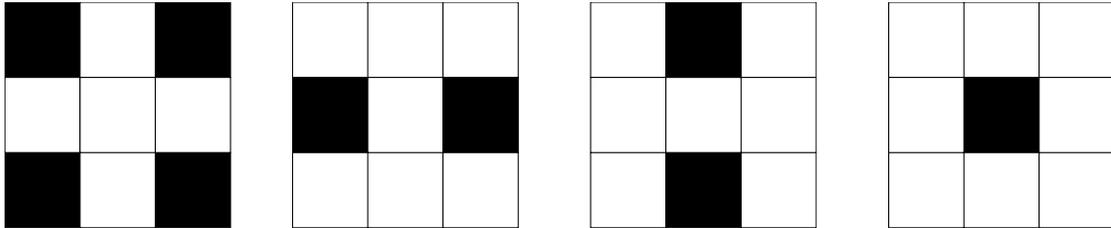
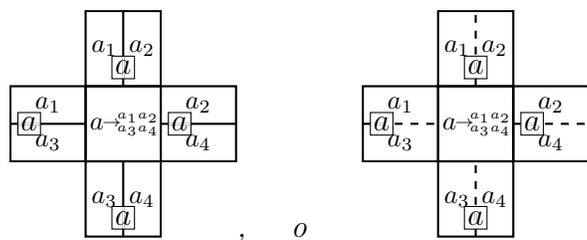
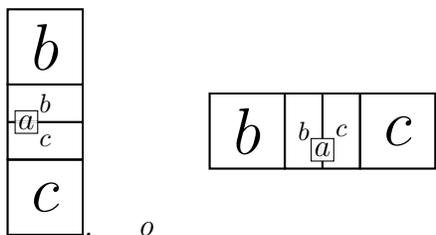


Figura 4.2: Casos posibles para patrones de tamaño 3×3 en Y_s .

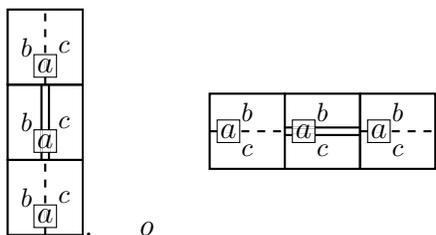
Restricción 1: Cada baldosa que lleve una regla debe estar rodeada de baldosas en una de las dos siguientes configuraciones donde a, a_1, a_2, a_3 y $a_4 \in \mathcal{A}$:



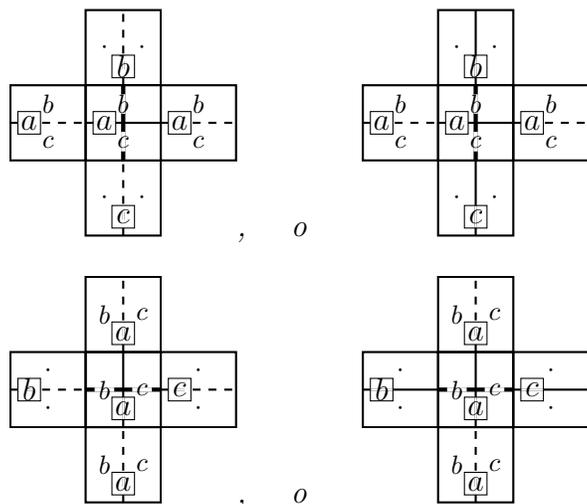
Restricción 2: Cada baldosa con una línea normal debe cumplir la configuración siguiente (se muestra el caso vertical y el horizontal donde $a, b, c \in \mathcal{A}$):



Restricción 3: Cada baldosa con una línea doble debe cumplir la configuración siguiente (se muestra el caso vertical y el horizontal donde $a, b, c \in \mathcal{A}$):

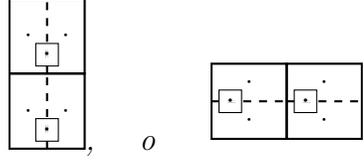


Restricción 4: Cada baldosa que lleve una línea de unión, debe estar en una de dos configuraciones posibles (se muestra el caso horizontal y vertical donde $a, b, c \in \mathcal{A}$ y el símbolo \cdot denota un elemento sin especificar de \mathcal{A}_H):



Restricción 5: Se **prohíbe** la aparición de dos baldosas con líneas de extensión en la misma dirección contiguas (se muestra el caso vertical y el horizontal donde el símbolo

· representa un símbolo de \mathcal{A} sin especificar):



Las restricciones anteriores pueden ser logradas prohibiendo una cantidad finita de patrones, luego Y_s es efectivamente un \mathbb{Z}^2 -SFT. Dichas restricciones generan un subshift sin mucha estructura por sí mismo, pero que es suficiente para generar la extensión que deseamos al tomar el producto con el subsistema minimal del shift de Robinson y agregar reglas adicionales.

Consideremos ahora al subshift producto $X_s^H \subseteq X_{\text{Rob}}^{\min} \times Y_s$ cuyos símbolos son pares compuestos de un símbolo en el alfabeto de X_{Rob}^{\min} en la primera componente y un símbolo de \mathcal{A}_H en la segunda componente. Además X_s^H es determinado por las siguientes reglas:

Regla 1: Si en la primera componente aparece una cruz de X_{Rob}^{\min} , siempre irá acompañada en su segunda componente de una baldosa que tiene un símbolo o una regla. Es importante notar que en virtud de la restricción 0 se tiene que si la cruz está en el 2-látice de cruces entonces irá acompañada de un símbolo y en el caso contrario de una de las reglas.

Regla 2: Las baldosas de unión de X_{Rob}^{\min} en la primera componente irán siempre acompañadas de una baldosa de línea normal o de línea de unión de \mathcal{A}_H en la segunda componente. La línea será horizontal si la línea negra con punta de flecha es horizontal, y será vertical si la línea negra con punta de flecha es vertical.

Regla 3: Las baldosas de extensión de X_{Rob}^{\min} en la primera componente son siempre acompañadas de una baldosa de línea de extensión o de línea doble de \mathcal{A}_H en la segunda componente. También estas líneas son horizontales o verticales si la línea negra con punta de flecha es horizontal o vertical (respectivamente).

Las reglas anteriores son solo una cantidad finita de restricciones locales sobre el alfabeto de X_s^H , luego en virtud de que X_{Rob}^{\min} es de tipo sófico e Y_s es un \mathbb{Z}^2 -SFT se tiene que X_s^H es un \mathbb{Z}^2 -subshift de tipo sófico. Llamaremos a X_s^H el \mathbb{Z}^2 -subshift jerárquico asociado a s .

Dado $x \in X_s^H$, se define $\pi_1(x)$ y $\pi_2(x)$ como las proyecciones naturales sobre X_{Rob}^{\min} e Y_s respectivamente.

Observación 4.3 Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ y sea $x \in X_s^H$. Considérese $S \subsetneq \mathbb{Z}^2$ un soporte finito cuadrado de tamaño $2^n - 1$ tal que $\pi_1(x)|_S$ es un supertile de nivel n del shift de Robinson. Entonces la baldosa en la posición central de S , (esto es, la posición $(2^{n-1}, 2^{n-1})$ de dicho supertile) tiene como símbolo en la segunda componente una baldosa de regla de \mathcal{A}_H .

DEMOSTRACIÓN. Cómo la baldosa central de un supertile de nivel $n \geq 2$ no pertenece al 2-látice de cruces, entonces utilizando la regla 1 se concluye que el símbolo asociado en la segunda componente debe ser una baldosa de regla. \square

Proposición 4.4 Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ y $x \in X_s^H$. Considérese $S \subsetneq \mathbb{Z}^2$ un soporte finito cuadrado de tamaño $2^n - 1$ tal que $\pi_1(x)|_S$ es un supertile de nivel n del shift de Robinson. Supongamos que la baldosa de regla que se encuentra en la segunda componente en la posición central de S corresponde a la regla (es regla por la observación 4.3) que contiene a la regla de s asociada al símbolo $a \in \mathcal{A}$. Luego $\pi_2(x)|_S = s_H^{(n-1)}(a)$

DEMOSTRACIÓN. Procederemos por inducción en el tamaño del bloque, digamos primero que el símbolo de la baldosa central es de la forma:

$$\boxed{a \begin{array}{c} \leftarrow a_1 a_2 \\ a_3 a_4 \end{array}}$$

Si $n = 2$, sin pérdida de generalidad el supertile tiene la forma que se aprecia en la figura 3.6 (las otras posibilidades son rotaciones de este supertile). Eso implica que las baldosas adyacentes a la cruz central son de unión, lo cual a su vez implica mediante la restricción 1 que deben aparecer líneas normales que lleven los símbolos siguientes:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline ? & \begin{array}{c} a_1 a_2 \\ \boxed{a} \end{array} & ? \\ \hline \begin{array}{c} a_1 \\ \boxed{a} \\ a_3 \end{array} & a \begin{array}{c} \leftarrow a_1 a_2 \\ a_3 a_4 \end{array} & \begin{array}{c} a_2 \\ \boxed{a} \\ a_4 \end{array} \\ \hline ? & \begin{array}{c} a_3 a_4 \\ \boxed{a} \end{array} & ? \\ \hline \end{array}$$

Usando la restricción 2 se concluye que en las esquinas del supertile deben ir los símbolos que aparecen en la regla, es decir, el patrón en la segunda componente corresponde a $s_H(a)$:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline a_1 & \begin{array}{c} a_1 a_2 \\ \boxed{a} \end{array} & a_2 \\ \hline \begin{array}{c} a_1 \\ \boxed{a} \\ a_3 \end{array} & a \begin{array}{c} \leftarrow a_1 a_2 \\ a_3 a_4 \end{array} & \begin{array}{c} a_2 \\ \boxed{a} \\ a_4 \end{array} \\ \hline a_3 & \begin{array}{c} a_3 a_4 \\ \boxed{a} \end{array} & a_4 \\ \hline \end{array}$$

Supóngase ahora que $n > 2$ y la afirmación es válida para las restricciones a supertiles de tamaño $n - 1$. Se demuestra a partir de ello que la misma afirmación vale para los supertiles de orden n . En efecto, para poder describir con mayor precisión los detalles de esta demostración, supongamos sin pérdida de generalidad, que el soporte de la restricción de x al supertile de nivel n es $R[2^n - 1, 2^n - 1]$. En virtud de la observación 4.3 tenemos que en la segunda componente en la posición central $(2^{n-1}, 2^{n-1})$ de este supertile tenemos una baldosa que es regla, es decir, es de la forma:

$$\boxed{a \begin{array}{c} \leftarrow a_1 a_2 \\ a_3 a_4 \end{array}}$$

Notemos que en dicha posición, al extenderse en las cuatro direcciones de \mathbb{Z}^2 solo hay baldosas de extensión, salvo en las posiciones $(2^{n-1}-2^{n-2}, 2^{n-1})$, $(2^{n-1}+2^{n-2}, 2^{n-1})$, $(2^{n-1}, 2^{n-1}-2^{n-2})$, $(2^{n-1}, 2^{n-1}+2^{n-2})$ donde hay baldosas de unión. Las restricciones de X_s^H obligan a que las posiciones que en la primera componente tengan baldosas de extensión tengan en la segunda componente baldosas con líneas de extensión y líneas dobles alternadas, y las restricciones de Y_s obligan a que estas extiendan la información de la baldosa que tiene una regla de la posición $(2^{n-1}, 2^{n-1})$ hacia las baldosas unión en las posiciones descritas anteriormente. De este modo, en función de la restricción 4, las baldosas de unión de dichas posiciones, solo pueden ser continuadas en las direcciones perpendiculares a la ya analizada, acarreando la información desde la regla de la posición $(2^{n-1}, 2^{n-1})$ de la manera en que se esquematiza en la figura 4.3.

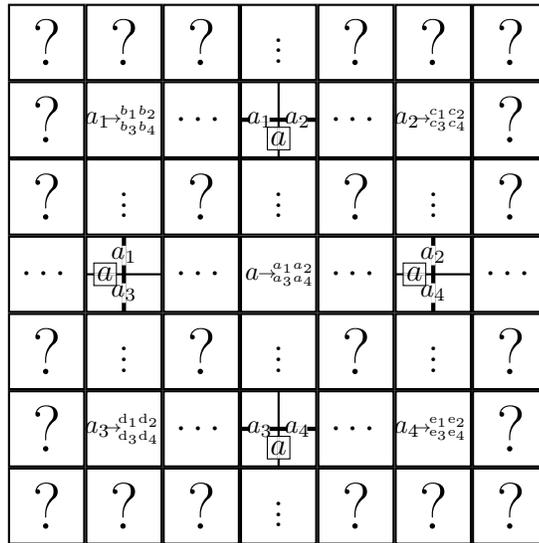


Figura 4.3: Esquema de demostración: la regla central fuerza las baldosas de unión, que a su vez fuerzan las baldosas centrales de cada uno de los supertiles de nivel $n - 1$ en las esquinas a contener reglas.

De esta manera, solo existirá una elección en la segunda componente para las posiciones $(2^{n-1} \pm 2^{n-2}, 2^{n-1} \pm 2^{n-2})$ y dicha elección corresponde a las reglas que se originan con los símbolos que aparecen en el lado derecho de la regla de s aplicada al símbolo a (ver nuevamente la figura 4.3).

Utilizando la hipótesis inductiva, se concluye que los supertiles de orden $n - 1$ de las esquinas, esto es, los que están centrados en las coordenadas descritas en el párrafo anterior están completamente determinados en la segunda componente y corresponden a $s_H^{n-2}(a_i)$ para todo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Lo único que queda por determinar son que baldosas de extensión van en las posiciones $(i, 2^{n-1})$ y $(2^{n-1}, i)$ con $i \in \{1, \dots, 2^n - 1\} \setminus \{2^{n-1} - 2^{n-2}, 2^{n-1}, 2^{n-1} + 2^{n-2}\}$. Utilizando que en virtud de las restricciones impuestas por Y_s las reglas no pueden estar al lado de líneas dobles, y las líneas dobles deben alternarse con las líneas de extensión se concluye que necesariamente dicho patrón proyectado en la segunda componente debe tener la forma:

$$\begin{array}{ccc}
s_H^{n-2}(\boxed{a1}) & s_H^{n-2}(\boxed{\begin{array}{c|c} a_1 & a_2 \\ \hline a & \end{array}}) & s_H^{n-2}(\boxed{a2}) \\
s_H^{n-2}(\boxed{\begin{array}{c|c} a_1 & \\ \hline a & a_3 \end{array}}) & s_H^{n-2}(\boxed{\begin{array}{c|c} a & a_1 a_2 \\ \hline a_3 & a_4 \end{array}}) & s_H^{n-2}(\boxed{\begin{array}{c|c} a_2 & \\ \hline a & a_4 \end{array}}) \\
s_H^{n-2}(\boxed{a3}) & s_H^{n-2}(\boxed{\begin{array}{c|c} a_3 & a_4 \\ \hline a & \end{array}}) & s_H^{n-2}(\boxed{a4})
\end{array} = s_H^{n-1}(\boxed{a}).$$

Lo cual concluye la demostración de la proposición. □

Ahora que se cuenta con la proposición 4.4 se poseen las herramientas para mostrar que X_s^H realmente es capaz de contener la información de un punto de X_s^l junto con todo su pasado de preimágenes infinito bajo la acción de s . Explicaremos lo anterior de manera rigurosa en dos proposiciones.

Proposición 4.5 $\forall x \in X_s^H$, el 2-látice $L \subsetneq \mathbb{Z}^2$ tal que la proyección de x a la primera componente restringida al látice L $\pi_1(x)|_L$ consiste únicamente de cruces, entonces la proyección de x a la segunda componente restringida a L $\pi_2(x)|_L$ contiene un punto $y \in X_s^l$. Más específicamente, si el látice es un conjunto de la forma $(z_1, z_2) + 2\mathbb{Z}^2$ con $(z_1, z_2) \in \{0, 1\}^2$ entonces para $g = (g_1, g_2) \in \mathbb{Z}^2$ se define $y_g := \pi_2(x)_{(z_1+z_2)+(2g_1, 2g_2)}$ y se afirma que $y \in X_s^l$.

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo a la proposición 2.10 bastará construir una secuencia $(y^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0} \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ tal que $y = y^{(0)}$ y $\forall j \in \mathbb{N}_0 \exists z^{(j)} \in \mathbb{Z}^2$ tal que $y^{(j)} = \sigma^{z^{(j)}} \circ s(y^{(j+1)})$.

Dado que $\pi_1(x)$ está en X_{Rob}^{\min} luego $\forall j \in \mathbb{N}$ existe un 2^j -látice tal que $\pi_1(x)$ restringido a ese látice consiste de cruces que son centros de supertiles de nivel j . Por la observación 4.3 tenemos que si $j \geq 2$ las baldosas de la segunda componente en el 2^j -látice anterior corresponden a reglas. Considérese entonces $y^{(j-1)}$ como el punto formado por los símbolos que son asociados esas reglas. Específicamente, si el látice es de la forma $z + 2^j\mathbb{Z}^2$ con $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$ tal que $0 \leq z_1 \leq 2^j$ y $0 \leq z_2 \leq 2^j$ entonces para $g = (g_1, g_2) \in \mathbb{Z}^2$ se define a $(y^{(j-1)})_g$ como el símbolo que es asociado a la regla $\pi_2(x)_{(z_1, z_2) + (2^j g_1, 2^j g_2)}$. Se muestra a continuación que dicha sucesión cumple la propiedad requerida.

En efecto, cómo cada cruz en el 2^j -látice de cruces en la primera componente es el centro de un supertile de nivel j , entonces para $j \geq 2$ de acuerdo a la proposición 4.4 todo el supertile en la segunda componente coincide con $s_H^{j-1}(a)$ donde $a \in \mathcal{A}$ es el símbolo asociado a la regla del centro del bloque en la segunda componente. Luego, si se asume que dicha baldosa de regla tiene la forma:

$$\boxed{\begin{array}{c|c} a & a_1 a_2 \\ \hline a_3 & a_4 \end{array}}$$

Es posible deducir que la proyección en la segunda componente de dicho bloque es:

$$s_H^{j-1} \left(\boxed{a} \right) = \begin{matrix} s_H^{j-2} \left(\boxed{a_1} \right) & s_H^{j-2} \left(\boxed{\begin{array}{c|c} a_1 & a_2 \\ \hline a & \end{array}} \right) & s_H^{j-2} \left(\boxed{a_2} \right) \\ s_H^{j-2} \left(\boxed{\begin{array}{c|c} a_1 & \\ \hline a & a_3 \end{array}} \right) & s_H^{j-2} \left(\boxed{\begin{array}{c|c} a & a_2 \\ \hline a_3 & a_4 \end{array}} \right) & s_H^{j-2} \left(\boxed{\begin{array}{c|c} a_2 & \\ \hline a & a_4 \end{array}} \right) \\ s_H^{j-2} \left(\boxed{a_3} \right) & s_H^{j-2} \left(\boxed{\begin{array}{c|c} a_3 & a_4 \\ \hline & a \end{array}} \right) & s_H^{j-2} \left(\boxed{a_4} \right) \end{matrix} .$$

En función de esto se puede separar el punto $y^{(j-2)}$ en cuadrados de tamaño dos de modo tal que cada bloque es la imagen vía s de un símbolo del punto $y^{(j-1)}$ y de este modo existe $z^{(j-2)} \in \mathbb{Z}^2$ tal que $y^{(j-2)} = \sigma^{z^{(j-2)}} \circ s(y^{(j-1)})$.

□

Proposición 4.6 *Dado $y \in X_s^l$ existe $x \in X_s^H$ tal que si $L \subsetneq \mathbb{Z}^2$ es el 2-látice tal que $\pi_1(x)|_L$ consiste únicamente de cruces entonces $\pi_2(x)|_L$ contiene al punto y .*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos $y \in X_s^l$. Así existe una secuencia $(y^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0} \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ tal que $y = y^{(0)}$ y $\forall j \in \mathbb{N}_0 \exists z^{(j)} \in \mathbb{Z}^2$ tal que $y^{(j)} = \sigma^{z^{(j)}} \circ s(y^{(j+1)})$. Se construye el punto x inductivamente de la siguiente forma: primero se fija $\pi_2(x)|_{2\mathbb{Z}^2} := y_{(z_1, z_2)}$ para todo $(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$. Eso fuerza a que $\pi_1(x)|_{2\mathbb{Z}^2}$ sea el 2-látice de cruces, pero no fija cual cruz va en cual posición. Utilizando la expresión $y = \sigma^{z^{(0)}} \circ s(y^{(1)})$ se puede descomponer y en cuadrados de tamaño 2 alineados, de modo tal que cada cuadrado sea la imagen de un símbolo de $y^{(1)}$. Fijamos entonces las cruces del 2-látice en la primera componente de modo tal que cada uno de dichos cuadrados esté dentro de un supertile de nivel 2, y en las posiciones centrales de dichos supertiles en la segunda componente se ponen las baldosas de regla cuyo símbolo asociado es el símbolo de \mathcal{A} que de acuerdo a la expresión $y = \sigma^{z^{(0)}} \circ s(y^{(1)})$ generó los símbolos de los extremos del cuadrado de tamaño 2 considerado. Así en la primera componente el punto queda totalmente definido sobre el 2-látice y se determinan las posiciones de las cruces del 4-látice. Finalmente, utilizando la proposición 4.4 se obtiene que en la segunda componente el punto está totalmente determinado en los bloques cuadrados de tamaño $3 = 2^{1+1} - 1$ centrados en las reglas del 4-látice. Uniendo los últimos dos argumentos se obtiene que el punto x está completamente definido en ambas componentes en el 2-látice $2\mathbb{Z}^2$.

Repitiendo el mismo argumento para $y^{(1)} = \sigma^{z^{(1)}} \circ s(y^{(2)})$ se determina la orientación de las cruces del 4-látice de cruces (cuya posición fue determinada en el paso anterior) que son centros de supertiles de nivel 2, y se fija la posición del 8-látice de cruces que son centros de supertiles de nivel 3, junto con las reglas que van sobre él en la segunda componente, de este modo el punto queda totalmente definido en su primera componente sobre sus supertiles de nivel 2, y en su segunda componente utilizando la proposición 4.4 el punto queda determinado totalmente sobre los bloques de tamaño $7 = 2^{2+1} - 1$ centrados en el 8-látice determinado en este paso. En conclusión x queda completamente determinado en los bloques de tamaño 3 centrados en el 4-látice descrito en este párrafo.

Iterando este argumento para $j \geq 1$ con la ecuación $y^{(j)} = \sigma^{z^{(j)}} \circ s(y^{(j+1)})$ se logra en cada paso definir x completamente en sus dos componentes en la restricción a los bloques

cuadrados de tamaño $2^{j+1} - 1$ centrados en el 2^{j+1} -látice en la primera componente. De este modo iterando el proceso infinitamente (por ejemplo, usando una secuencia como en la usada en la demostración de que X_{Rob} no es vacío), obtendremos que solo resta definir x en a lo más dos líneas que separan supertiles de nivel infinito, como es el caso de la figura 4.4.

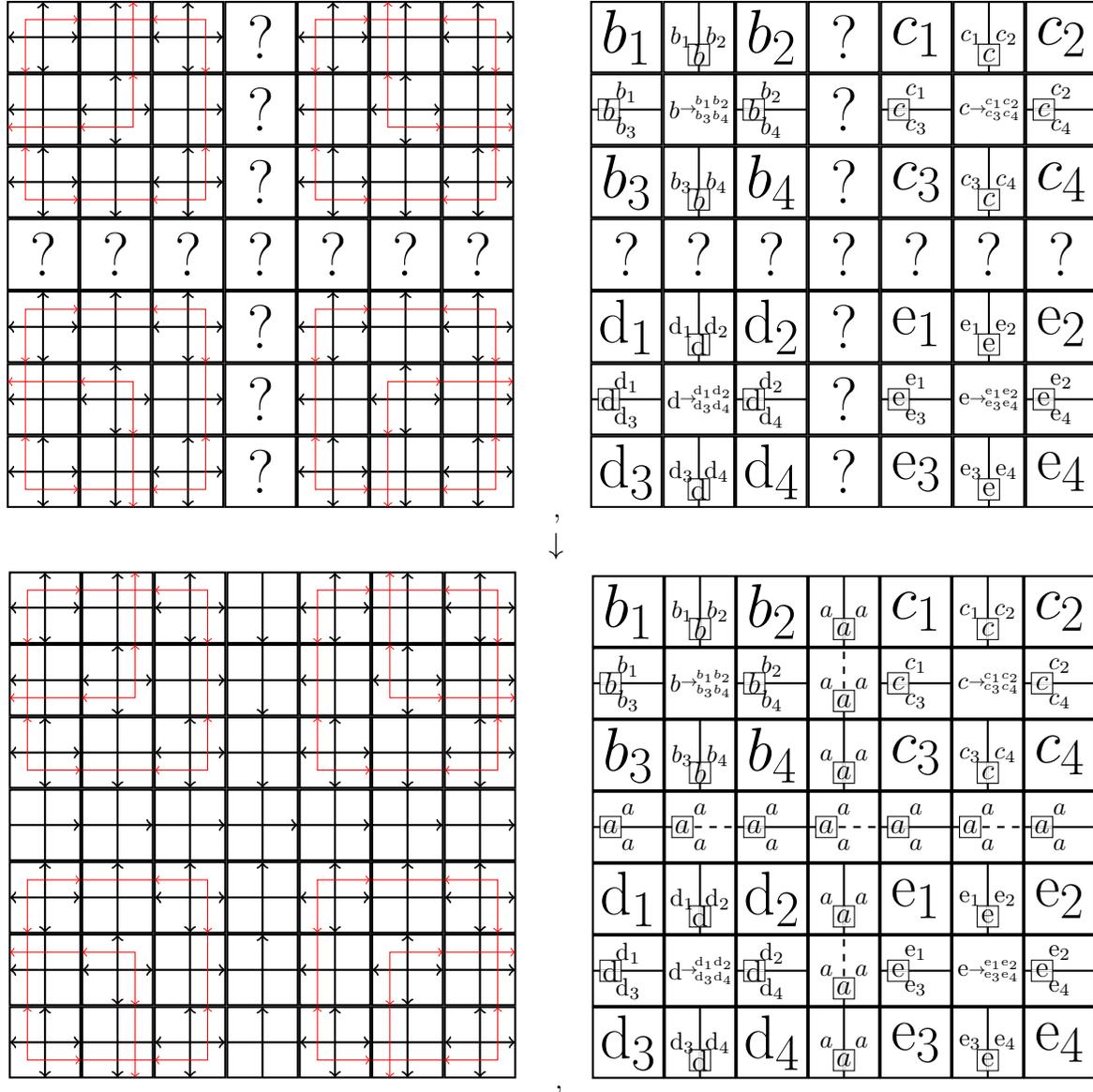


Figura 4.4: Estructura de un punto de X_s^H con dos líneas infinitas donde aún no es definido y una posibilidad para rellenar esas líneas. Se muestran ambas componentes en cada línea. Todas las letras en esta figura son símbolos de \mathcal{A} .

Solo resta fijar los símbolos en dichas líneas. Hay varias formas de hacerlo, pero lo más sencillo es simplemente rellenarlas en la primera componente con baldosas de extensión, y luego en la segunda componente con una secuencia alternada de baldosas que contengan líneas de extensión y líneas dobles (sin importar las tripletas que contengan siempre que sean consistentes con las restricciones de Y_s). En la figura 4.4 se muestra una forma de hacer esto. La última elección en la segunda componente no viola ninguna de las restricciones de Y_s .

□

Ahora sea $(X_s^H)^{\{2\}}$, el 2-higher power shift del \mathbb{Z}^2 -subshift X_s^H (ver definición 1.17). Dado que todo punto en X_s^H tiene un 2-látice de símbolos de \mathcal{A} en su segunda componente, se puede definir un c.v.d. 1-bloque $\phi = \Phi_\infty$ en $(X_s^H)^{\{2\}}$ dado por su función local $\Phi : \mathcal{L}_{2 \times 2}(X_s^H) \rightarrow \mathcal{A}$ de modo tal que cada $P \in \mathcal{L}_{2 \times 2}(X_s^H)$ patrón globalmente admisible de tamaño 2×2 de X_s^H y luego símbolo del alfabeto de $(X_s^H)^{\{2\}}$ se manda por Φ al único símbolo $a \in \mathcal{A}$ que aparece en la proyección de P a la segunda componente.

Teorema 4.7 $\phi : (X_s^H)^{\{2\}} \rightarrow X_s^l$ es un código factor.

DEMOSTRACIÓN. En efecto, ϕ es un código de la ventana deslizante, luego por el teorema 1.15 es necesariamente continuo y conmuta con el shift.

Por la proposición 4.5 se sabe que $\phi((X_s^H)^{\{2\}}) \subseteq X_s^l$, lo cual sumado a la proposición 4.6 entrega que $\phi : (X_s^H)^{\{2\}} \rightarrow X_s^l$ es sobreyectiva.

□

Corolario 4.8 X_s^l es un \mathbb{Z}^2 -subshift de tipo sófico.

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo al corolario 3.18 X_{Rob}^{\min} es de tipo sófico, además Y_s es de tipo finito. En consecuencia $X_s^H \subseteq X_{\text{Rob}}^{\min} \times Y_s$ es también de tipo sófico pues solo se agregó una cantidad finita de patrones finitos prohibidos extras para generarlo.

Finalmente, si X_s^H es de tipo sófico entonces $(X_s^H)^{\{2\}}$ es también de tipo sófico, como todo factor de un subshift de tipo sófico es un subshift de tipo sófico, se concluye que X_s^l es sófico, lo cual demuestra lo requerido.

□

Antes de continuar con la siguiente sección y generalizar el resultado a sustituciones rectangulares es importante hacer dos alcances con respecto a la demostración realizada. En primer lugar es relevante notar que la demostración entrega una extensión SFT de manera explícita para cada subshift límite generado por una \mathbb{Z}^2 -sustitución cuadrada de tamaño 2. Basta utilizar el \mathbb{Z}^2 -SFT de Robinson con la decoración de líneas azules punteadas $X_{\text{Rob}}^{\text{dec}}$ definida en la sección 3.4 en vez de X_{Rob}^{\min} para construir X_s^H . El segundo comentario es que no es realmente necesario utilizar la sustitución s_H en la demostración, tan sólo fue utilizada para simplificar la redacción ya que es una alternativa relativamente sencilla para definir los bloques $s_H^n(a)$ para $a \in \mathcal{A}$ y $n \in \mathbb{N}$. Si la construcción se hace prescindiendo de la sustitución s_H se puede en particular prescindir de las líneas dobles, las cuales solo se introducen para entregar consistencia a la sustitución para la concatenación.

4.2. Extensión SFT para \mathbb{Z}^2 -subshifts límites generados por \mathbb{Z}^2 -sustituciones rectangulares

En esta sección se generaliza el resultado demostrado previamente al caso de \mathbb{Z}^2 -sustituciones rectangulares de tamaño arbitrario. Las demostraciones realizadas acá son muy similares ya que las únicas diferencias son que crece un poco el alfabeto sobre el que actúa la sustitución jerárquica y que se utiliza el sistema minimal contenido en el shift de Robinson generalizado en vez del shift de Robinson usual.

A lo largo de esta sección se supondrá que s es una \mathbb{Z}^2 -sustitución rectangular que actúa sobre un alfabeto \mathcal{A} . También supondremos que el tamaño de s es (k, l) con $k, l \in \mathbb{N}$ números naturales y $k, l \geq 2$. Es decir, la sustitución tiene reglas que son de la forma:

$$a \xrightarrow{s} \begin{array}{ccc} a_{1l} & \dots & a_{kl} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & \dots & a_{k1} \end{array} \quad \text{donde } a, a_{ij} \in \mathcal{A} \text{ para cada } (i, j) \in R[k, l]$$

Al igual que en la sección anterior, se comienza definiendo una \mathbb{Z}^2 -sustitución $s_H^{k,l}$ asociada a s la cual actúa sobre un alfabeto extendido $\mathcal{A}_H^{k,l}$ el cual se representa mediante los siguientes tipos de baldosas:

1. **Símbolos:** Corresponden a los símbolos de \mathcal{A} . Por cada $a \in \mathcal{A}$ representamos su baldosa asociada en $\mathcal{A}_H^{k,l}$ como:

$$\boxed{a}$$

Su función es guardar la información de $s^n(\cdot)$ para $n \in \mathbb{N}$ en $(s_H^{k,l})^n(\cdot)$.

2. **Reglas:** Por cada regla de sustitución en s de la forma $a \xrightarrow{s} \begin{array}{ccc} a_{1l} & \dots & a_{kl} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & \dots & a_{k1} \end{array}$ existe en $\mathcal{A}_H^{k,l}$

una baldosa que contiene dicha información. Tal baldosa se representa de la siguiente manera:

$$\boxed{s(a)}$$

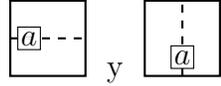
Su función es guardar la información de $s^m(\cdot) \forall 0 \leq m < n$ y para $n \in \mathbb{N}$ en $(s_H^{k,l})^n(\cdot)$. A diferencia del caso cuadrado, no se muestra en el dibujo la regla completa pues la baldosa sería ilegible, sin embargo la baldosa contiene la información completa de la regla. Al símbolo $a \in \mathcal{A}$ en la baldosa de regla que lleva la información $s(a)$ se le denomina símbolo asociado.

3. **Líneas normales:** Por cada letra $a \in \mathcal{A}$ y par $(i, j) \in R[k, l]$ están en $\mathcal{A}_H^{k,l}$ los símbolos:

$$\begin{array}{|c|} \hline (i, j) \\ \hline a \\ \hline \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{|c|} \hline (i, j) \\ \hline \underline{a} \\ \hline \end{array}$$

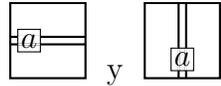
En el caso de que la línea negra sea horizontal entonces $(i, j) \in R[k, l-1]$ mientras que en el caso vertical $(i, j) \in R[k-1, l]$. Su función es análoga a las líneas normales en el caso cuadrado (cohesionar los símbolos de un supertile de nivel 2) pero su interpretación cambia. Si la línea negra es horizontal entonces la tupla (i, j) codifica el hecho que la baldosa une verticalmente los símbolos que se encuentran en las posiciones (i, j) y $(i, j+1)$ de $s(a)$. Si la línea negra es vertical entonces (i, j) indica que la baldosa une los símbolos en las posiciones (i, j) y $(i+1, j)$.

4. **Líneas de extensión:** Por cada símbolo $a \in \mathcal{A}$ existen en $\mathcal{A}_H^{k,l}$ las baldosas:



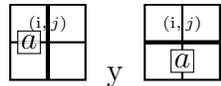
Su función es transmitir información desde las reglas hacia los extremos de los bloques y las líneas de unión. A diferencia del caso de sustituciones cuadradas de tamaño 2, acá tenemos suficiente información en las baldosas de líneas normales y de unión y no precisamos agregar más detalles a estas baldosas.

5. **Líneas dobles:** Por cada símbolo $a \in \mathcal{A}$ también están en $\mathcal{A}_H^{k,l}$ las siguientes baldosas:



Su función es la misma de las líneas de extensión y solo están para darle consistencia a la sustitución $s_H^{k,l}$, es decir, asegurar que sea compatible con la concatenación.

6. **Líneas de unión:** Por cada letra $a \in \mathcal{A}$ y par $(i, j) \in R[k, l]$ tenemos en $\mathcal{A}_H^{k,l}$ las baldosas:

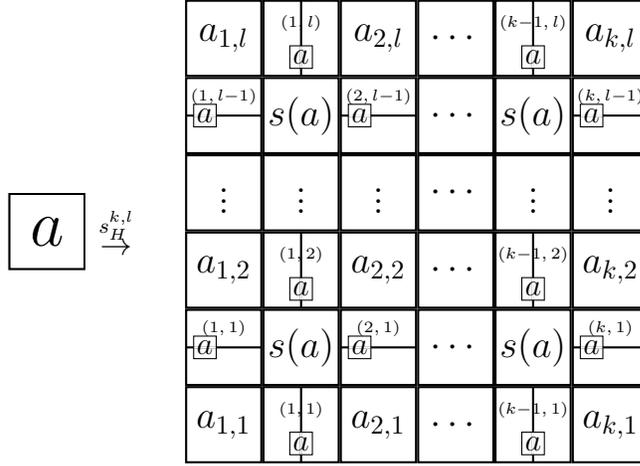


El par (i, j) sigue la misma restricción que en el caso de líneas normales (la línea negra del caso anterior corresponde a la que tiene el símbolo $a \in \mathcal{A}$). La función de estas baldosas es conectar la información de bloques adyacentes de manera consistente de acuerdo a la misma regla de las líneas normales.

Además $s_H^{k,l}$ cuenta con las siguientes reglas de sustitución:

1. Por cada regla en s de la forma $a \xrightarrow{s} \begin{matrix} a_{1l} & \dots & a_{kl} \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{matrix}$ se tiene en $s_H^{k,l}$ la regla:

$$\begin{matrix} a_{1l} & \dots & a_{kl} \\ a_{11} & \dots & a_{1k} \end{matrix}$$



Es decir, tiene la forma de un (k, l) -supertile de nivel 2 de $X_{\text{Rob}}(k, l)$ donde las cruces del 2-látice de cruces del shift de Robinson se reemplazan por los símbolos $a_{i,j}$ ($1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l$) de la sustitución, la cruz en $(2, 2)$ y las baldosas de relleno del Robinson se reemplazan por reglas que llevan $s(a)$ y el resto de las baldosas de unión del Robinson se reemplazan por baldosas de líneas normales acompañadas de la misma tupla (i, j) .

- Al igual que en la sección anterior, las reglas se mantienen fijas bajo la sustitución $s_H^{k,l}$:

$$\boxed{s(a)} \xrightarrow{s_H^{k,l}} \boxed{s(a)}$$

- Las baldosas que llevan líneas normales o líneas de extensión se reemplazan bajo la sustitución $s_H^{k,l}$ por hileras de baldosas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \boxed{\overset{(i,j)}{a}} &\xrightarrow{s_H^{k,l}} \boxed{a} \text{---} \boxed{\overset{(i,j)}{a}} \text{---} \boxed{a} \text{---} \left(\boxed{a} \text{---} \boxed{a} \text{---} \right)^{k-2} \\ \boxed{a} \text{---} &\xrightarrow{s_H^{k,l}} \boxed{a} \text{---} \boxed{a} \text{---} \boxed{a} \text{---} \left(\boxed{a} \text{---} \boxed{a} \text{---} \right)^{k-2} \end{aligned}$$

Aquí las hileras tienen largo $(2k - 1)$ y ancho 1. La misma regla aplica para este tipo de baldosas con líneas verticales, solo que rotando la figura de arriba en 90 grados en sentido contrario de las manecillas del reloj e intercambiando k por l , es decir, se producen hileras de altura $(2l - 1)$ y ancho 1.

- Al igual que en la sección anterior, las baldosas que tienen líneas de unión o líneas dobles se mantienen fijas bajo la sustitución $s_H^{k,l}$:

$$\begin{aligned} \boxed{\overset{(i,j)}{a}} &\xrightarrow{s_H^{k,l}} \boxed{\overset{(i,j)}{a}}, & \boxed{\underset{(i,j)}{a}} &\xrightarrow{s_H^{k,l}} \boxed{\underset{(i,j)}{a}} \\ \boxed{a} \text{---} &\xrightarrow{s_H^{k,l}} \boxed{a} \text{---}, & \boxed{a} &\xrightarrow{s_H^{k,l}} \boxed{a} \end{aligned}$$

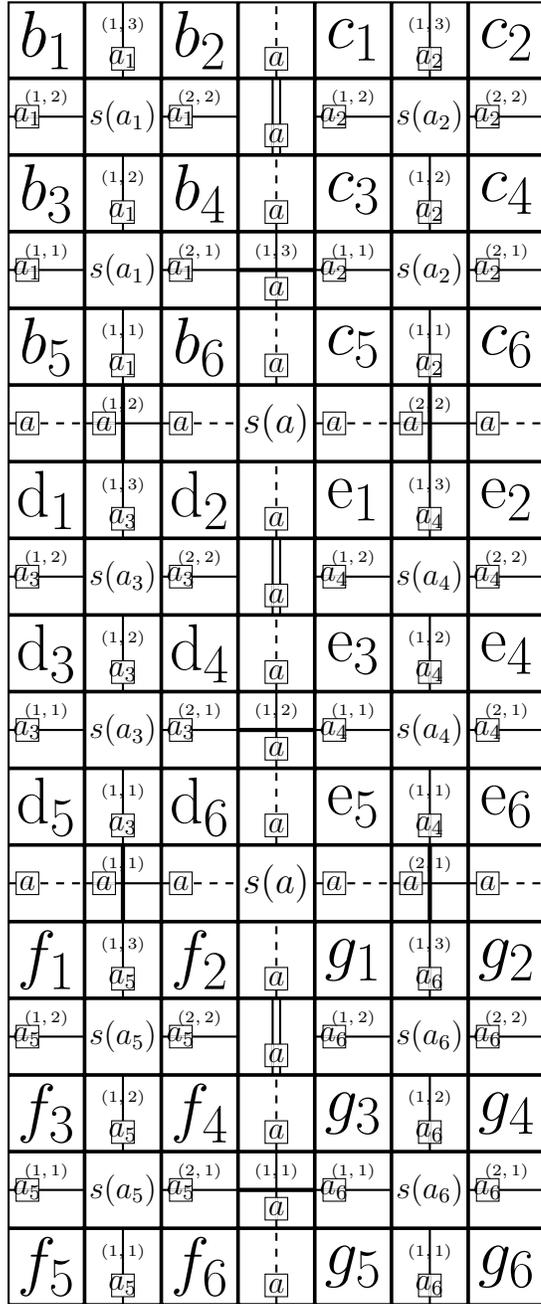
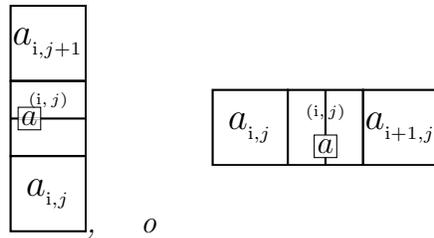
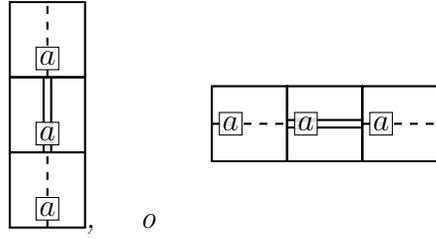


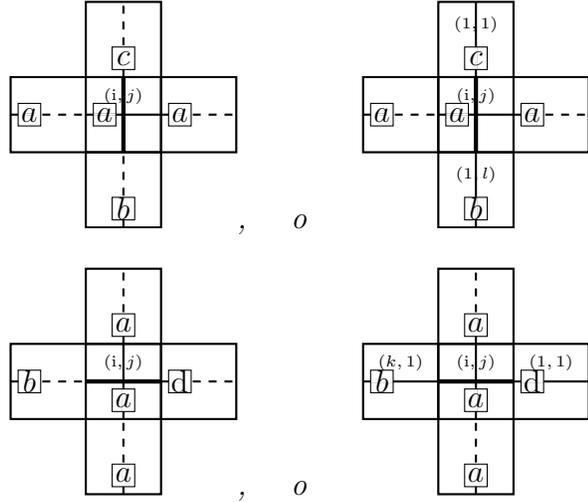
Figura 4.5: El resultado de aplicar la sustitución $s_H^{2,3}$ dos veces al símbolo $a \in \mathcal{A}$.



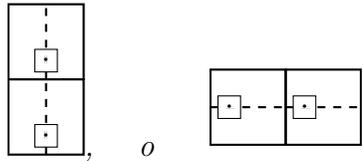
Restricción 3: Cada baldosa de línea doble debe cumplir la configuración siguiente (se muestra el caso vertical y el horizontal, $a \in \mathcal{A}$):



Restricción 4: Cada baldosa que lleve una línea de unión, debe estar en una de dos configuraciones posibles donde $a \in \mathcal{A}$ (por motivos de espacio, en esta imagen se denotan los símbolos de \mathcal{A} $b := a_{i,j}$, $c := a_{i,j+1}$ y $d := a_{i+1,j}$. También se muestra el caso horizontal y vertical):



Restricción 5: Se **prohíbe** la aparición de dos baldosas con líneas de extensión en la misma dirección contiguas (se muestra el caso vertical y el horizontal, \cdot representa un símbolo de \mathcal{A} arbitrario):



Consideremos ahora al \mathbb{Z}^2 -subshift producto $X_s^H(k, l) \subseteq X_{\text{Rob}}^{\min}(k, l) \times Y_s(k, l)$ cuyos símbolos son pares de un símbolo de $X_{\text{Rob}}^{\min}(k, l)$ en la primera componente y un símbolo de $\mathcal{A}_H^{k,l}$ en la segunda componente. $X_s^H(k, l)$ está definido por las siguientes reglas que limitan el alfabeto $\mathcal{A}(X_s^H(k, l))$:

Regla 1: Si en la primera componente aparece una cruz $X_{\text{Rob}}^{\min}(k, l)$ siempre irá acompañada en la segunda componente de una baldosa que tiene un símbolo o una regla. Es importante notar que en virtud de la restricción 0, si la cruz está en el 2-látice de cruces irá necesariamente acompañada de un símbolo y en el caso contrario de una de las baldosas que traen reglas.

Regla 2: Las baldosas de relleno de $X_{\text{Rob}}^{\min}(k, l)$ en la primera componente deben ir acompa-

ñadas en la segunda componente por una regla.

Regla 3: Las baldosas de unión de $X_{\text{Rob}}^{\min}(k, l)$ en la primera componente irán siempre acompañadas de una baldosa de línea normal o de línea de unión del $\mathcal{A}_H^{k,l}$ en la segunda componente. La línea será horizontal si la línea negra con punta de flecha es horizontal, y será vertical si la línea negra con punta de flecha es vertical. Además la tupla (i, j) que acompaña a la flecha roja sin puntas de la baldosa de unión del $X_{\text{Rob}}^{\min}(k, l)$ debe coincidir con la tupla que aparece en la baldosa de la segunda componente.

Regla 4: Las baldosas de extensión de $X_{\text{Rob}}^{\min}(k, l)$ en la primera componente van siempre acompañadas de una baldosa de línea de extensión o de línea doble del $\mathcal{A}_H^{k,l}$ en la segunda componente. También estas líneas son horizontales o verticales si la línea negra con punta de flecha es horizontal o vertical (respectivamente).

A continuación se procede a demostrar versiones generalizadas de las mismas proposiciones de la sección anterior. Las demostraciones son muy similares y en consecuencia no se entrega tanto detalle como en la sección anterior.

Sea $x \in X_s^H(k, l)$, se define $\pi_1(x)$ y $\pi_2(x)$ como las proyecciones naturales sobre $X_{\text{Rob}}^{\min}(k, l)$ y $X_s^H(k, l)$ respectivamente.

Observación 4.11 *Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ y $x \in X_s^H(k, l)$. Considérese $S \subsetneq \mathbb{Z}^2$ un soporte rectangular finito de tamaño $(2k^{n-1} - 1, 2l^{n-1} - 1)$ tal que $\pi_1(x)|_S$ es un (k, l) -supertile de nivel n en $X_{\text{Rob}}^{\min}(k, l)$. Entonces la baldosa en la posición central de $\pi_2(x)|_S$ (esto es, la posición $(2k^{n-2}, 2l^{n-2})$ de dicho supertile) tiene como símbolo en su segunda componente una baldosa de regla de $\mathcal{A}_H^{k,l}$.*

DEMOSTRACIÓN. Todo (k, l) -supertile de nivel $n \geq 2$ de $X_{\text{Rob}}^{\min}(k, l)$ tiene una cruz en la posición $(2k^{n-2}, 2l^{n-2})$. Tal cruz no pertenece al 2-látice de cruces de $X_{\text{Rob}}^{\min}(k, l)$. En consecuencia, de acuerdo a la regla 1 de $X_s^H(k, l)$ el símbolo en la segunda componente de x en esa posición debe corresponder a una baldosa de regla.

□

Proposición 4.12 *Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ y $x \in X_s^H(k, l)$. Considérese $S \subsetneq \mathbb{Z}^2$ un soporte rectangular finito de tamaño $(2k^{n-1} - 1, 2l^{n-1} - 1)$ tal que $\pi_1(x)|_S$ es un (k, l) -supertile de nivel n en $X_{\text{Rob}}^{\min}(k, l)$. Supongamos que la baldosa de regla que se encuentra en la segunda componente en la posición central corresponde a la marcada con la regla $s(a)$ con $a \in \mathcal{A}$. Luego $\pi_2(x)|_S = (s_H^{k,l})^{(n-1)}(a)$*

DEMOSTRACIÓN. Al igual que en la demostración para el caso de la \mathbb{Z}^2 -sustitución cuadrada de tamaño 2, se procede por inducción en n . Sin pérdida de generalidad supongáse que el soporte del (k, l) -supertile de nivel n es $R[2k^{n-1} - 1, 2l^{n-1} - 1]$.

Si $n = 2$ las reglas del shift de Robinson generalizado fueran a que el (k, l) -supertile de nivel 2 esté compuesto en la primera componente solamente de cruces, baldosas de relleno y de unión. En consecuencia solo puede traer en la segunda componente símbolos y baldosas

de reglas, líneas normales o unión. En función de esto, la restricción 1 fuerza a que la regla central esté rodeada de baldosas con líneas normales que llevan el símbolo a (no pueden ser de extensión por la regla 3 de $X_s^H(k, l)$), las cuales fuerzan a su vez que las baldosas de relleno adyacentes lleven la misma regla $s(a)$ que la baldosa de la posición central. Este argumento se puede extender por todo el supertile obligando a que en la segunda componente todas las baldosas de relleno tengan la misma regla $s(a)$ que la baldosa de la posición central y todas las baldosas normales lleven el símbolo a . La regla 3 de $X_s^H(k, l)$ obliga a que las baldosas con líneas normales de $\mathcal{A}_H^{k,l}$ lleven las tuplas de las baldosas de unión de $X_{\text{Rob}}^{\min}(k, l)$, lo cual a su vez obliga mediante la restricción 2 de $Y_s(k, l)$ a que todos los símbolos del 2-látice que en la primera componente consiste de cruces estén determinados y sus segundas componentes correspondan a un arreglo rectangular de los símbolos de $s(a)$. En consecuencia se obtiene que $\pi_2(x)|_{R[2k-1, 2l-1]} = s_H^{k,l}(a)$. La secuencia de deducciones se esquematiza en la figura 4.6.

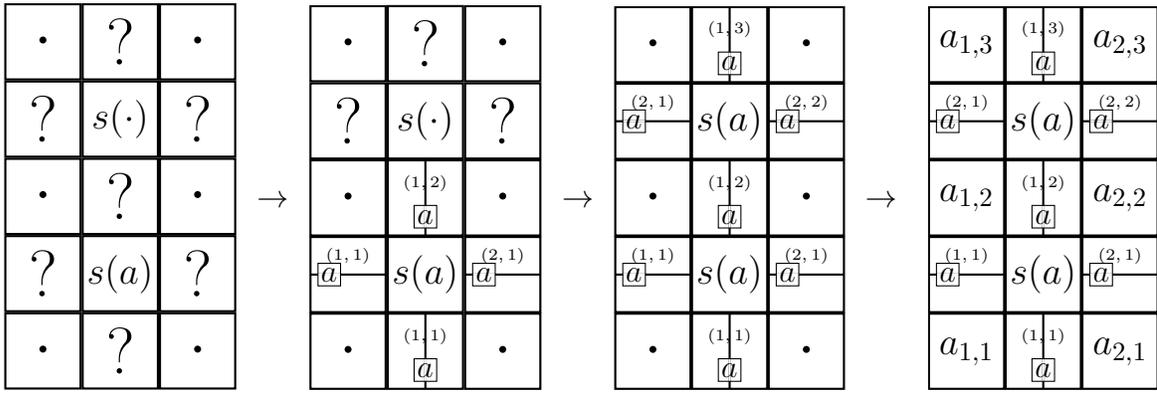


Figura 4.6: Esquema de deducción de la proposición 4.12 para el caso $n = 2$ (se muestran las baldosas de la segunda componente). Los puntos denotan elementos de $\mathcal{A}_H^{k,l}$ desconocidos, y se usa la notación $a_{i,j} := s(a)_{i,j}$ para $a \in \mathcal{A}$.

Supongamos ahora que la afirmación es válida para $n - 1$ con $n > 2$. Se probará a partir de ello que vale para n .

La prueba en este caso general sigue la misma estrategia del caso de sustitución cuadrada. En primer lugar, la estructura de un (k, l) -supertile de nivel n de $X_{\text{Rob}}^{\min}(k, l)$ consiste en un arreglo rectangular de $k \times l$ (k, l) -supertiles de nivel $n - 1$ separados a distancia 1 (llamamos a todas las posiciones que están entre dichos supertiles el esqueleto), con una baldosa central en la posición $(2k^{n-2}, 2l^{n-2})$ que es una cruz, y baldosas de unión que unen las líneas que se originan en la baldosa central de cada uno de los (k, l) -supertiles de nivel $n - 1$. El argumento comienza en la baldosa central, la restricción 1 junto con la regla 4 fuerza en la segunda componente baldosas con líneas de extensión que traen el símbolo a adyacentes a los cuatro bordes de la regla $s(a)$, y las restricciones 3 y 5 fuerzan a que se extiendan mediante líneas dobles y de extensión por todo el esqueleto del supertile donde en la primera componente hayan baldosas de extensión. De este modo, todas las baldosas que rodean los (k, l) -supertiles de nivel $n - 1$ en la primera componente quedan totalmente determinadas en la segunda componente, es decir, las baldosas de extensión llevan en la segunda componente baldosas con líneas de extensión y dobles con el símbolo a , las baldosas de unión llevan baldosas con línea de unión con símbolo a y la tupla de la baldosa de unión correspondiente (no pueden ser baldosas con línea normal debido a la restricción 2), y las baldosas de relleno necesariamente

están forzadas a llevar la regla $s(a)$. Eso implica mediante la restricción 5 que las baldosas de unión que unen los (k, l) -supertiles de nivel $n - 1$ fuerzan a su vez que las baldosas en la posición central de cada uno de éstos coincidan en la segunda componente con una baldosa de regla generada por el símbolo de $s(a)_{i,j}$, donde (i, j) es la posición del (k, l) -supertile de nivel $n - 1$ dentro del arreglo de $k \times l$ de ellos. En consecuencia utilizando la hipótesis inductiva se concluye que cada uno de esos (k, l) -supertiles de nivel $n - 1$ corresponden en la segunda componente al patrón $(s_H^{k,l})^{n-2}(a_{i,j})$, donde (i, j) es la posición de cada supertile en el arreglo rectangular de $k \times l$ (k, l) -supertiles de nivel $n - 1$. De esta manera todas las baldosas de la segunda componente están determinadas y el patrón completo corresponde a $(s_H^{k,l})^{n-1}(a)$.

□

Luego de la demostración anterior, se tienen las herramientas para probar que $X_s^H(k, l)$ efectivamente es capaz de contener todo el pasado de preimágenes infinitas bajo la acción de s de un punto $y \in X_s^l$. Lo anterior se explicita en dos proposiciones.

Proposición 4.13 *Para todo $x \in X_s^H(k, l)$ el 2-látice $L \subsetneq \mathbb{Z}^2$ tal que la proyección de x a la primera componente restringido a L , $\pi_1(x)|_L$, consiste únicamente de cruces, cumple que la proyección de x a la segunda componente restringida a L contiene un punto $y \in X_s^l$. Más específicamente, si el látice es un conjunto de la forma $(z_1, z_2) + 2\mathbb{Z}^2$ con $(z_1, z_2) \in \{0, 1\}^2$ entonces para $g = (g_1, g_2) \in \mathbb{Z}^2$ se define $y_g := \pi_2(x)_{(z_1+z_2)+(2g_1, 2g_2)}$ y se afirma que $y \in X_s^l$.*

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo a la proposición 2.10 bastará construir una secuencia $(y^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0} \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ tal que $y = y^{(0)}$ y $\forall j \in \mathbb{N}_0 \exists z^{(j)} \in \mathbb{Z}^2$ tal que $y^{(j)} = \sigma^{z^{(j)}} \circ s(y^{(j+1)})$.

Dado que $\pi_1(x)$ está en $X_{\text{Rob}}^{\min}(k, l)$ luego $\forall j \in \mathbb{N}$ existe un $(2k^{j-1}, 2l^{j-1})$ -látice tal que $\pi_1(x)$ restringido a ese látice consiste de cruces que son centros de supertiles de nivel j . Por la observación 4.11 tenemos que si $j \geq 2$ las baldosas de la segunda componente en el $(2k^{j-1}, 2l^{j-1})$ -látice anterior corresponden a reglas. Considérese entonces $y^{(j-1)}$ como el punto formado por los símbolos asociados a esas reglas. Específicamente, si el látice es de la forma $z + (2k^{j-1}\mathbb{Z} \times 2l^{j-1}\mathbb{Z})$ con $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$ tal que $0 \leq z_1 \leq 2k^{j-1}$ y $0 \leq z_2 \leq 2l^{j-1}$ entonces para $g = (g_1, g_2) \in \mathbb{Z}^2$ se define a $(y^{(j-1)})_g$ como el símbolo asociado a la regla $\pi_2(x)_{(z_1, z_2) + (2k^{j-1}g_1, 2l^{j-1}g_2)}$. Se muestra a continuación que dicha sucesión cumple la propiedad requerida.

En efecto, cómo cada cruz en el $(2k^{j-1}, 2l^{j-1})$ -látice de cruces en la primera componente es el centro de un supertile de nivel j , entonces para $j \geq 2$ de acuerdo a la proposición 4.12 todo el (k, l) -supertile de nivel j en la segunda componente coincide con $(s_H^{k,l})^{j-1}(a)$ donde $a \in \mathcal{A}$ es el símbolo asociado a la regla del centro del bloque en la segunda componente. De esta manera, el (k, l) -supertile se puede escribir como la imagen bajo $(s_H^{k,l})^{j-2}$ de un patrón de la forma:

$a_{1,l}$	$\begin{array}{c} (1,l) \\ \boxed{a} \end{array}$	$a_{2,l}$	\dots	$\begin{array}{c} (k-1,l) \\ \boxed{a} \end{array}$	$a_{k,l}$
$\begin{array}{c} (1,l-1) \\ \boxed{a} \end{array}$	$s(a)$	$\begin{array}{c} (2,l-1) \\ \boxed{a} \end{array}$	\dots	$s(a)$	$\begin{array}{c} (k,l-1) \\ \boxed{a} \end{array}$
\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots	\vdots
$a_{1,2}$	$\begin{array}{c} (1,2) \\ \boxed{a} \end{array}$	$a_{2,2}$	\dots	$\begin{array}{c} (k-1,2) \\ \boxed{a} \end{array}$	$a_{k,2}$
$\begin{array}{c} (1,1) \\ \boxed{a} \end{array}$	$s(a)$	$\begin{array}{c} (2,1) \\ \boxed{a} \end{array}$	\dots	$s(a)$	$\begin{array}{c} (k,1) \\ \boxed{a} \end{array}$
$a_{1,1}$	$\begin{array}{c} (1,1) \\ \boxed{a} \end{array}$	$a_{2,1}$	\dots	$\begin{array}{c} (k-1,1) \\ \boxed{a} \end{array}$	$a_{k,1}$

Donde los símbolos $a_{i,j}$ con $(i,j) \in R[k,l]$ son los elementos (i,j) de $s(a)$. En función de lo anterior y de que cada $x \in X_{\text{Rob}}^{\min}(l,k)$ es de tipo látice, se puede separar el punto $y^{(j-2)}$ en rectángulos de tamaño (k,l) de modo tal que cada bloque es la imagen vía s de un símbolo del punto $y^{(j-1)}$ y de este modo existe $z^{(j-2)} \in \mathbb{Z}^2$ tal que $y^{(j-2)} = \sigma^{z^{(j-2)}} \circ s(y^{(j-1)})$. \square

Proposición 4.14 *Dado $y \in X_s^l$ existe $x \in X_s^H(k,l)$ tal que si $L \subsetneq \mathbb{Z}^2$ es el 2-látice tal que $\pi_1(x)|_L$ consiste únicamente de cruces entonces $\pi_2(x)|_L$ contiene al punto y .*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos $y \in X_s^l$. Así existe una secuencia $(y^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0} \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ tal que $y = y^{(0)}$ y $\forall j \in \mathbb{N}_0 \exists z^{(j)} \in \mathbb{Z}^d$ tal que $y^{(j)} = \sigma^{z^{(j)}} \circ s(y^{(j+1)})$. Se construye el punto x inductivamente de la siguiente forma: primero se fija $\pi_2(x)_{(2z_1, 2z_2)} := y_{(z_1, z_2)}$ para todo $(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$. Eso fuerza a que $\pi_1(x)|_{2\mathbb{Z}^2}$ sea el 2-látice de cruces, pero no fija cual cruz va en cual posición. Utilizando la expresión $y = \sigma^{z^{(0)}} \circ s(y^{(1)})$ se puede descomponer y en rectángulos de tamaño $k \times l$ alineados, de modo tal que cada rectángulo sea la imagen de un símbolo de $y^{(1)}$. Fijamos entonces las cruces del 2-látice en la primera componente de modo tal que cada uno de dichos rectángulos esté dentro de un (k,l) -supertile de nivel 2, y en las posiciones centrales de dichos (k,l) -supertiles en la segunda componente se ponen las baldosas de reglas que van asociadas a los símbolos de \mathcal{A} que de acuerdo a la expresión $y = \sigma^{z^{(0)}} \circ s(y^{(1)})$ generó los símbolos del rectángulo de tamaño (k,l) considerado. Así el punto queda totalmente definido sobre el 2-látice y se determinan las posiciones de las cruces del $(2k, 2l)$ -látice. Finalmente usando la proposición 4.12 se obtiene que el punto está totalmente determinado en los bloques rectangulares de tamaño $(2k-1, 2l-1)$ centrados en las reglas del 4-látice. Uniendo los últimos dos argumentos se obtiene que el punto x está totalmente definido en ambas componentes en el 2-látice $2\mathbb{Z}^2$

Repetiendo el mismo argumento para $y^{(1)} = \sigma^{z^{(1)}} \circ s(y^{(2)})$ se fijan las cruces del $(2k, 2l)$ -látice de cruces (cuya posición fue determinada en el paso anterior) que son centros de supertiles de nivel 2, y se fija la posición del $(2k^2, 2l^2)$ -látice de cruces que son centros de supertiles de nivel 3 en la primera componente (sin saber su orientación). Así el punto queda totalmente definido en su primera componente sobre sus (k,l) -supertiles de nivel 2. En su segunda componente usando nuevamente 4.12 se obtiene que el punto queda totalmente determinado en la segunda coordenada en los bloques rectangulares de tamaño $(2k-1, 2l-1)$. Juntando estos dos

argumentos x queda totalmente definido en ambas coordenadas sobre los bloques de tamaño $(2k, 2l)$ cuya coordenada central corresponden al $(2k, 2l)$ -látice descrito anteriormente.

Iterando este argumento para $j \geq 1$ con la ecuación $y^{(j)} = \sigma^{z^{(j)}} \circ s(y^{(j+1)})$ se logra en cada paso definir x completamente en sus dos componentes en la restricción a bloques rectangulares de tamaño $(2k^j - 1, 2l^j - 1)$ cuya coordenada central está en un $(2k^j, 2l^j - 1)$ -látice determinado. De este modo iterando el proceso infinitamente, solo resta definir x en a lo más dos líneas que separan supertiles de nivel infinito, como es el caso que se estudia en la sección anterior en la figura 4.4.

Para rellenar dichas líneas se procede de la misma manera que en la demostración de la proposición 4.6. Es decir, en la primera componente se rellenan dichas líneas con baldosas de extensión de $X_{\text{Rob}}^{\min}(k, l)$, y en la segunda componente con baldosas de líneas de extensión y dobles alternadas de $\mathcal{A}_H^{k,l}$ que lleven una sola tripleta consistente, como es el caso de la figura 4.4.

□

El resto de la demostración es exactamente igual al caso donde la sustitución es cuadrada de tamaño 2. Se considera el 2-higher power shift de $X_s^H(k, l)$, es decir el \mathbb{Z}^2 -subshift $(X_s^H(k, l))^{\{2\}}$ (ver definición 1.17). Dado que todo punto en $X_s^H(k, l)$ tiene un 2-látice de símbolos de \mathcal{A} en su segunda componente, se puede definir un c.v.d. 1-bloque $\phi = \Phi_\infty$ en $(X_s^H(k, l))^{\{2\}}$ dado por su función local $\Phi : \mathcal{L}_{2 \times 2}(X_s^H(k, l)) \rightarrow \mathcal{A}$ de modo tal que cada $P \in \mathcal{L}_{2 \times 2}(X_s^H(k, l))$ patrón globalmente admisible de tamaño 2×2 de $X_s^H(k, l)$ y luego símbolo del alfabeto de $(X_s^H(k, l))^{\{2\}}$ se manda por Φ al único símbolo $a \in \mathcal{A}$ que aparece en la proyección de P a la segunda componente.

Teorema 4.15 $\phi : (X_s^H(k, l))^{\{2\}} \rightarrow X_s^l$ es un código factor.

DEMOSTRACIÓN. En efecto, ϕ es un código de la ventana deslizante y por lo tanto continuo y conmuta con el shift. Las proposiciones 4.13 y 4.14 aseguran que $\phi((X_s^H(k, l))^{\{2\}}) = X_s^l$. □

Corolario 4.16 X_s^l es un \mathbb{Z}^2 -subshift de tipo sófico para toda \mathbb{Z}^2 -sustitución rectangular s .

DEMOSTRACIÓN. En efecto, $X_s^H(k, l)$ es un \mathbb{Z}^2 -subshift de tipo sófico dado que $X_{\text{Rob}}^{\min}(k, l)$ es de tipo sófico por el teorema 3.15, es decir que $X_{\text{Rob}}^{\min}(k, l) \times Y_s(k, l)$ es de tipo sófico, y $X_s^H(k, l)$ está definido añadiendo solo un conjunto finito de patrones prohibidos extra. En consecuencia se sigue que tanto $X_s^H(k, l)$ como $(X_s^H(k, l))^{\{2\}}$ son también \mathbb{Z}^2 -subshifts de tipo sófico. Finalmente como X_s^l es un factor de $(X_s^H(k, l))^{\{2\}}$, se concluye que X_s^l es también un \mathbb{Z}^2 -subshift de tipo sófico. □

Lo anterior concluye la prueba principal de este capítulo. En consecuencia, todos los subshifts límites generados por \mathbb{Z}^2 -sustituciones son de tipo sófico. Al igual que en la prueba del caso particular de las sustituciones cuadradas de tamaño 2, la demostración acá presentada entrega de manera explícita una extensión, simplemente reemplazando el uso de $X_{\text{Rob}}^{\min}(k, l)$ por $X_{\text{Rob}}^{\text{dec}}(k, l)$. También es posible de prescindir de la sustitución jerárquica para la demos-

tración, ganando así un alfabeto un poco más pequeño para la extensión, sin embargo algunas demostraciones se tornan un poco más engorrosas.

Capítulo 5

Un \mathbb{Z}^2 -SFT minimal no trivial generado por una sustitución

El resultado de Mozes presentado en el teorema 2.11 indica que todo \mathbb{Z}^2 -subshift generado por una sustitución rectangular es de tipo sófico, sin embargo no entrega información alguna respecto a la interrogante sobre si dicho \mathbb{Z}^2 -subshift es un SFT o es estrictamente sófico. No es difícil encontrar ejemplos para cada uno de los casos anteriores.

Ejemplo Consideremos $\mathcal{A} := \{\circ, \bullet\}$, y s una \mathbb{Z}^2 -sustitución cuadrada de tamaño 2 dada por las reglas:

$$\circ \rightarrow \begin{array}{cc} \circ & \bullet \\ \bullet & \circ \end{array}, \quad \bullet \rightarrow \begin{array}{cc} \circ & \bullet \\ \bullet & \circ \end{array}.$$

La \mathbb{Z}^2 -sustitución anterior genera únicamente puntos periódicos y corresponde al \mathbb{Z}^2 -SFT que se define prohibiendo la aparición de dos símbolos blancos o dos símbolos negros consecutivos en cualquier dirección de la base (es conjugado al \mathbb{Z}^2 -SFT del capítulo 1 donde se genera un tablero de ajedrez infinito). En consecuencia X_s es un \mathbb{Z}^2 -SFT.

Ejemplo Consideremos $\mathcal{A} := \{\circ, \bullet\}$, y s una \mathbb{Z}^2 -sustitución cuadrada de tamaño 3 dada por las reglas:

$$\circ \rightarrow \begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{array}, \quad \bullet \rightarrow \begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{array}.$$

Esta \mathbb{Z}^2 -sustitución genera un \mathbb{Z}^2 -subshift que es estrictamente sófico. Corresponde a los puntos que tienen a lo más un símbolo \bullet inmerso en un mar de \circ . Es de tipo estrictamente sófico dado que si fuese un \mathbb{Z}^2 -SFT existiría $n \in \mathbb{N}$ tal que el soporte de todos los patrones prohibidos está contenido en $\Lambda_n \subsetneq \mathbb{Z}^2$ y en consecuencia podrían aparecer dos \bullet en un punto si se encuentran suficientemente lejos.

Una forma de avanzar en el problema de clasificar (en \mathbb{Z}^2 -sóficos estrictos y \mathbb{Z}^2 -SFT) los \mathbb{Z}^2 -

subshifts s3ficos X_s donde s es una \mathbb{Z}^2 -sustituci3n rectangular es entender que clase de \mathbb{Z}^2 -SFT se pueden realizar de esta forma, en ese sentido, si todas las \mathbb{Z}^2 -sustituciones primitivas que generan un \mathbb{Z}^2 -SFT minimal generasen solamente \mathbb{Z}^2 -subshifts finitos, es decir, que consisten de una sola 3rbita peri3dica, entonces ser3a sencillo dar una clasificaci3n de estos objetos.

Recordamos que en el caso de \mathbb{Z} -subshifts, los 3nicos \mathbb{Z} -SFT minimales consisten necesariamente de una 3rbita finita, sin embargo como se mostr3 en el cap3tulo 3 tal restricci3n no es cierta en el caso de los SFT multidimensionales. En el sentido del p3rrafo anterior, una pregunta interesante es: 3es cierto que todos los \mathbb{Z}^2 -SFT minimales que se generan por una sustituci3n s primitiva consisten 3nicamente de una 3rbita finita? El primer ejemplo entregado en este cap3tulo justamente corresponde a una 3rbita finita, y la pregunta de si se puede encontrar expl3citamente una \mathbb{Z}^2 -sustituci3n rectangular s tal que el \mathbb{Z}^2 -subshift X_s generado por ella es un \mathbb{Z}^2 -SFT minimal no trivial (sin puntos peri3dicos) es en consecuencia interesante.

El objetivo de este cap3tulo es mostrar que la respuesta a la pregunta anterior es negativa, es decir, se construye un ejemplo expl3cito de un \mathbb{Z}^2 -SFT minimal sin puntos peri3dicos que es generado por una sustituci3n cuadrada de tama3o 2.

5.1. Construcci3n de un contraejemplo

En esta secci3n se construye un ejemplo de un \mathbb{Z}^2 -SFT minimal sin puntos peri3dicos que es generado por una sustituci3n cuadrada de tama3o 2. Para hacer esto se modificar3 el shift de Robinson decorado de modo tal que los bloques sean cuadrados de tama3o 3 que se solapan (se entrega una definici3n formal de las reglas de adyacencia m3s adelante). La raz3n de este solape es simplemente entregar consistencia en la formaci3n de supertiles de nivel $n \in \mathbb{N}$.

Sea $X_{\text{Rob}}^{\text{dec}}$ el shift de Robinson decorado definido en la secci3n 3.4 para el caso del shift de Robinson usual. Se define ac3 un nuevo \mathbb{Z}^2 -SFT Y a partir de $X_{\text{Rob}}^{\text{dec}}$ de la siguiente forma:

El alfabeto $\mathcal{A}(Y)$ es el conjunto de todos los patrones $P \in \mathcal{L}_{3 \times 3}(X_{\text{Rob}}^{\text{dec}})$ cuyo soporte es un cuadrado de tama3o 3 y cuya baldosa central es una cruz de su 2-l3tice de cruces.

Las reglas de adyacencia de Y son bastante similares a las de los embaldosados de Wang, sean A, B s3mbolos en $\mathcal{A}(Y)$, es decir $A, B \in \mathcal{L}_{3 \times 3}(X_{\text{Rob}}^{\text{dec}})$, de la siguiente forma:

$$A := \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{array}, \quad B := \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{array}.$$

Donde $\forall i \in \{1, \dots, 9\}$ se tiene que $a_i, b_i \in \mathcal{A}(X_{\text{Rob}}^{\text{dec}})$. En Y se permite la aparici3n del patr3n AB si $a_3 = b_1$, $a_6 = b_4$ y $a_9 = b_7$. Es decir, todos los s3mbolos de $X_{\text{Rob}}^{\text{dec}}$ en la columna derecha de A deben coincidir con los s3mbolos de la columna izquierda de B . Todos los dem3s patrones horizontales de dos s3mbolos est3n prohibidos. Verticalmente se permite la aparici3n

del patrón $\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}$ en Y solo si $a_7 = b_1$, $a_8 = b_2$ y $a_9 = b_3$. Todos los demás patrones de dos símbolos verticalmente adyacentes de $\mathcal{A}(Y)$ están prohibidos.

Es decir, en Y se permite que dos símbolos de $\mathcal{A}(Y)$ (patrones en $\mathcal{L}_{3 \times 3}(X_{\text{Rob}}^{\text{dec}})$) sean adyacentes si estos se solapan en el borde en que son adyacentes.

Proposición 5.1 *Y es un \mathbb{Z}^2 -SFT no vacío y que no contiene puntos periódicos.*

DEMOSTRACIÓN. Dado que el alfabeto $\mathcal{A}(Y)$ es finito, se tiene que la cantidad de reglas de adyacencia es finita (son reglas de tipo nearest neighbor) y en consecuencia Y es efectivamente un \mathbb{Z}^2 -SFT. El hecho de que sea no vacío viene de que por cada punto de $X_{\text{Rob}}^{\text{dec}}$ se puede formar un punto de Y tomando los bloques de tamaño 3 que se forman en torno al $(2\mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z})$ -látice de cruces. Del mismo modo, por cada punto en Y se puede construir un punto en $X_{\text{Rob}}^{\text{dec}}$ pegando los bloques utilizando el solape. Esto último implica que Y al igual que $X_{\text{Rob}}^{\text{dec}}$ no posee puntos periódicos. □

Antes de continuar, solamente por un criterio estético y para ahorrar espacio, se representan los patrones conexos $P \in \mathcal{L}(Y)$ con el solape de los bordes mostrado solo una vez, la figura 5.1 ejemplifica lo anterior. De esta manera un patrón cuadrado de tamaño $n \in \mathbb{N}$ en $\mathcal{L}(Y)$ se representa como un patrón cuadrado de tamaño $2n + 1$ en $\mathcal{L}(X_{\text{Rob}}^{\text{dec}})$.

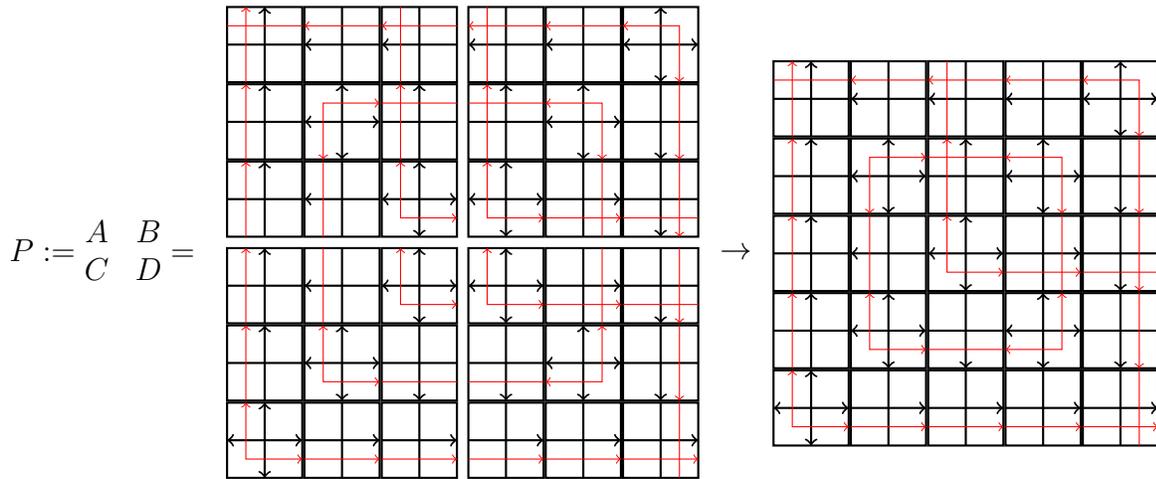


Figura 5.1: A la izquierda un patrón $P \in \mathcal{L}_{2 \times 2}(Y)$ cuadrado de tamaño 2 en Y (se nota la repetición en las filas y columnas 3 y 4). En vez de utilizar esta representación redundante, se utiliza la representación de la derecha, donde se colapsan estas repeticiones.

A continuación se construye una \mathbb{Z}^2 -sustitución cuadrada s de tamaño 2 sobre el alfabeto $\mathcal{A}(Y)$ y posteriormente se muestra que $X_s = Y$. Dado que la cantidad de reglas de s es exactamente $|\mathcal{A}(Y)| = |\{P \in \mathcal{L}_{3 \times 3}(X_{\text{Rob}}^{\text{dec}}) | P_{(2,2)} \text{ es una cruz del 2-látice de cruces}\}| = 448$, en vez de explicitarlas todas se muestra la forma general que poseen. También por simplicidad

en los dibujos se omiten las líneas azules punteadas de $X_{\text{Rob}}^{\text{dec}}$ ya que existe una única manera de dibujarlas.

El cálculo de $|\mathcal{A}(Y)|$ realizado en el párrafo anterior se realiza de la siguiente manera: primero se elige la baldosa de la posición $(2, 2)$ del patrón de 3×3 . Esto entrega 4 posibilidades. Sin pérdida de generalidad se puede asumir que dicha baldosa es la de la posición inferior izquierda de un supertile de nivel 2, dado que el resto de los patrones son rotaciones de éste. De esta manera, como la baldosa pertenece al 2-látice de cruces, esto obliga a la baldosa de la posición $(3, 3)$ a ser una cruz, así hay 4 posibilidades y se fijan las baldosas de la posición $(2, 3)$ y $(3, 2)$. Finalmente, la baldosa de la posición $(1, 1)$ está totalmente libre, y al elegirla necesariamente el resto de las baldosas están fijas. En consecuencia $|\mathcal{A}(Y)| = 4 \cdot 4 \cdot 28 = 448$ baldosas.

Sea A un símbolo de $\mathcal{A}(Y)$. Se define la \mathbb{Z}^2 -sustitución cuadrada s de tamaño 2 sobre el alfabeto $\mathcal{A}(Y)$ mediante el conjunto de reglas que tienen la forma que se muestra en la figura 5.2.

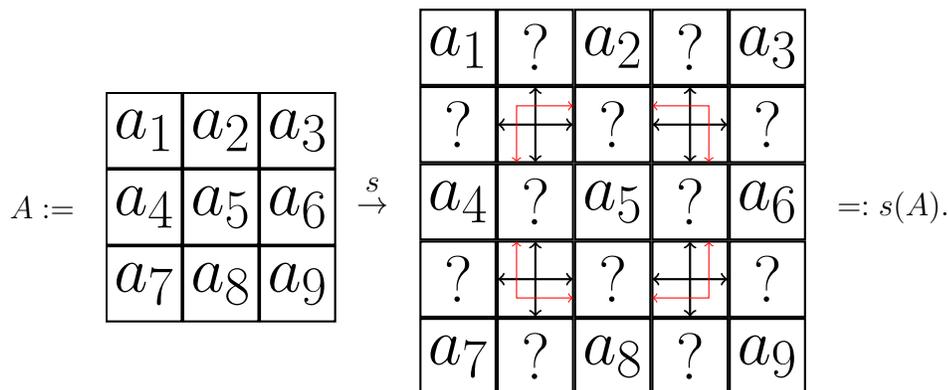


Figura 5.2: Forma general de una regla dada por s . El bloque de la izquierda representa a un símbolo $A \in \mathcal{A}(Y)$ y el bloque de la derecha su imagen bajo s . El hecho de que a_5 sea una cruz del 2-látice asegura que la imagen $s(A)$ contiene un supertile de nivel 2 en su centro de tamaño 3×3 y que todas las baldosas que llevan el símbolo $?$ están determinadas únicamente por los símbolos a_i con $i \in \{1, \dots, 9\}$.

Las reglas del shift de Robinson fuerzan que necesariamente para un símbolo $A \in \mathcal{A}(Y)$ la imagen $s(A)$ esté completamente determinada por las coordenadas descritas en la figura 5.2. En efecto, las cuatro cruces que se agregan fuerzan a que se forme un supertile de nivel 2 en el bloque cuadrado de tamaño 3 en el centro de la imagen (vista como un bloque de $X_{\text{Rob}}^{\text{dec}}$). Como el símbolo central de la imagen $s(A)$ es siempre una cruz, esto es consistente con lo anterior y determina completamente la imagen en el cuadrado de tamaño 3 central. El resto de las baldosas admite solo una posibilidad. Esto se ilustra con los ejemplos de la figura 5.3. Esto termina de definir la sustitución s .

Definición 5.2 Sea $n \in \mathbb{N}$. Diremos que un patrón cuadrado de tamaño 2^{n-1} en Y (es un patrón cuadrado de tamaño $2^n + 1$ visto como patrón de $X_{\text{Rob}}^{\text{dec}}$) es un supertile de orden n de Y si al verlo como un patrón de $X_{\text{Rob}}^{\text{dec}}$ y al quitarle las baldosas del borde exterior queda un supertile de orden n .

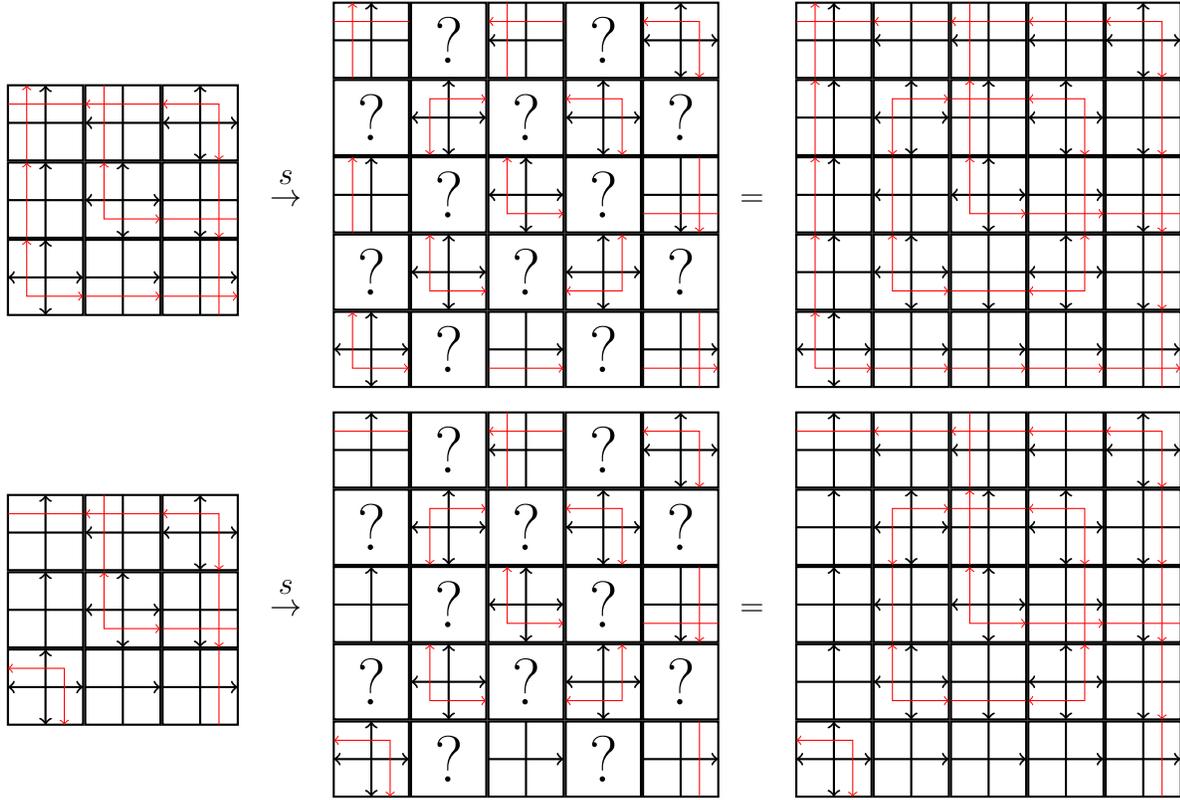


Figura 5.3: Dos ejemplos que siguen la estructura de la figura 5.2. Las líneas azules no se muestran por simplicidad.

Ejemplo $\forall A \in \mathcal{A}(Y)$, A es un supertile de orden 1 y $s(A)$ es un supertile de orden 2.

Lema 5.3 Dado $n \in \mathbb{N}$ y $A \in \mathcal{A}(Y)$, se tiene que $s^n(A)$ es un supertile de orden $n + 1$.

DEMOSTRACIÓN. Para el caso $n = 1$ el resultado es evidente debido a la definición mostrada en la figura 5.2 y el hecho de que las cuatro cruces que fija necesariamente fuerzan la aparición de un supertile de orden 2.

Supongamos que el resultado es cierto para $n - 1$, es decir, $s^{n-1}(A)$ es un supertile de nivel n . Como cada supertile de nivel n está compuesto de cuatro supertiles de nivel $n - 1$, aplicando la sustitución s sobre ellos y usando la hipótesis inductiva se obtiene que la imagen $s^n(A)$ contiene cuatro supertiles de nivel n que solapan correctamente en su borde, además la baldosa del centro es la misma baldosa del centro de $s^{n-1}(A)$ la cual es una cruz debido a la hipótesis inductiva. Luego la baldosa del centro de $s^n(A)$ es una cruz, y $s^n(A)$ está compuesto de 4 supertiles de nivel $n - 1$. Luego por definición $s^n(A)$ es un supertile de nivel n . \square

Proposición 5.4 La sustitución s es primitiva. En consecuencia X_s es minimal.

DEMOSTRACIÓN. Cada elemento $A \in \mathcal{A}(Y)$ es un bloque de tamaño 3 de $X_{\text{Rob}}^{\text{dec}}$ y en consecuencia debe aparecer como parte de algún supertile de nivel suficientemente grande. Como $\forall B \in$

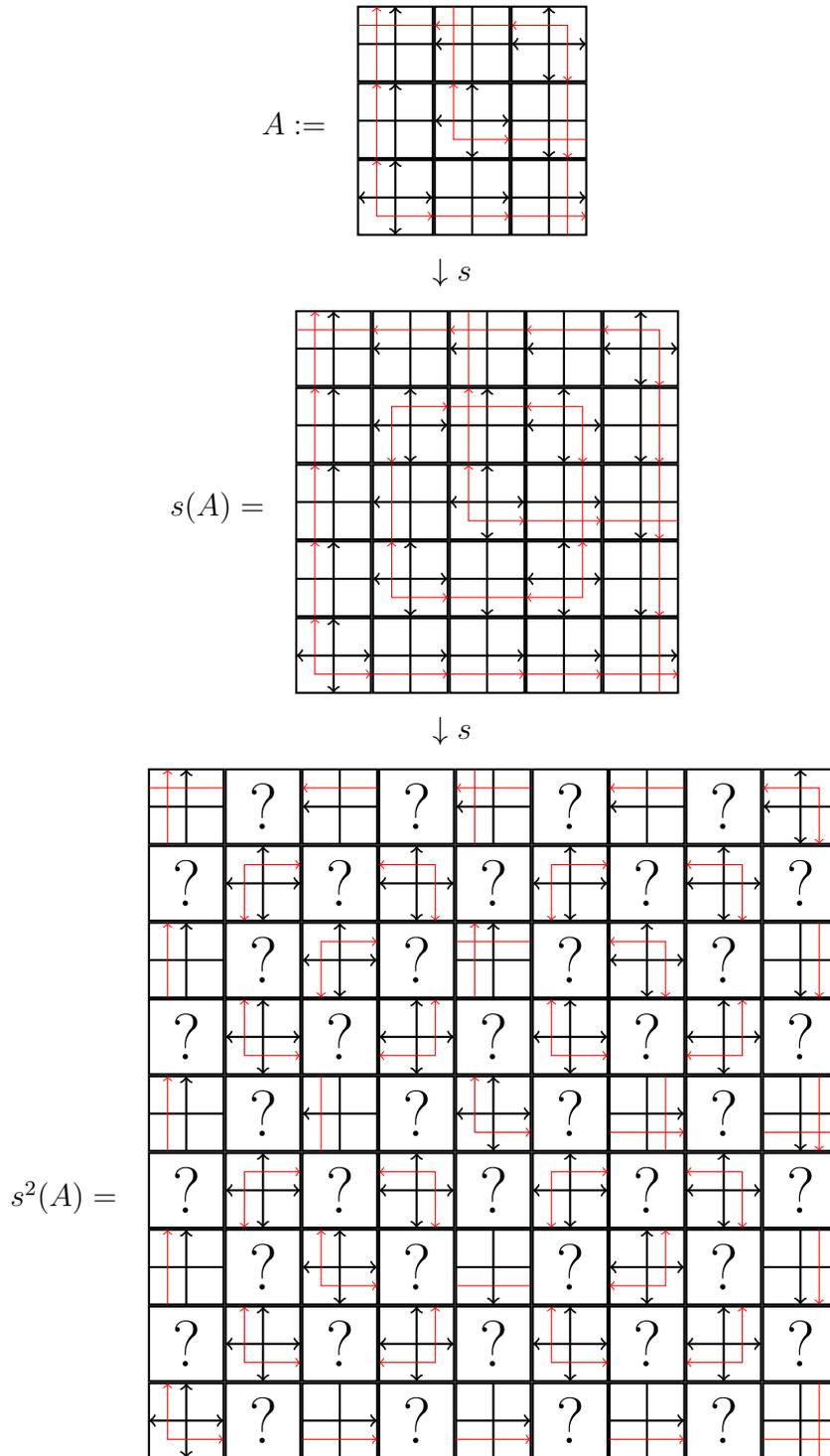


Figura 5.4: Un supertile de nivel 3 de Y generado por $s^2(\cdot)$. Todas las baldosas que aparecen con el símbolo $?$ están determinadas por el resto de las baldosas. Por simplicidad no se muestran las líneas azules.

$\mathcal{A}(Y) s^n(B)$ es un supertile de orden $n + 1$, en particular contiene como subpatrones a los 4 supertiles de nivel n distintos. Como $\mathcal{A}(Y)$ es finito se concluye que existe $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tal que $\forall A \in \mathcal{A} A \sqsubseteq s^{\bar{n}}(B)$. \square

Teorema 5.5 $X_s = Y$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $y \in Y$ y mostraremos que $y \in X_s$. En efecto, sea $P \sqsubseteq y$. Usando que todo patrón de $X_{\text{Rob}}^{\text{dec}}$ aparece en algún supertile de nivel suficientemente grande (proposición 3.19) y acudiendo al lema 5.3 se concluye que existe $A \in \mathcal{A}(Y)$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $s^n(A)$ contiene a P . En consecuencia $y \in X_s$. Luego $Y \subseteq X_s$.

Como X_s es minimal, entonces si $Y \subseteq X_s$ es un subsistema, se tiene que $Y = \emptyset$ o $Y = X_s$. Como $Y \neq \emptyset$ se concluye que $X_s = Y$.

□

En conclusión, tenemos que Y es un \mathbb{Z}^2 -SFT minimal, sin puntos periódicos que es generado por la \mathbb{Z}^2 -sustitución cuadrada s de tamaño 2. Esto indica que es posible obtener un \mathbb{Z}^2 -SFT minimal no trivial generado por una sustitución de manera explícita.

Conclusión

En este último capítulo de la memoria se presentan los resultados obtenidos en su desarrollo y se enuncian algunas posibles generalizaciones de los resultados obtenidos. También se plantean ideas que pueden resultar útiles en el estudio futuro de estos tópicos.

En el capítulo 3 se construyó para números naturales $k, l \geq 2$ el shift de Robinson generalizado $X_{\text{Rob}}(k, l)$, el cual al igual que el shift de Robinson tiene una estructura jerárquica de supertiles, sin embargo para $n \in \mathbb{N}$ en el sistema generalizado cada supertile de nivel $n + 1$ ya no se construye mediante la cohesión de cuatro supertiles de nivel n , sino de un arreglo rectangular de $k \times l$ de dichas estructuras. Su importancia es dejada en claro en el capítulo 4 en donde se utiliza para probar un teorema de clasificación de \mathbb{Z}^2 -subshifts. Una posible generalización obvia de este tipo de estructuras es hacia \mathbb{Z}^d con $d > 2$, es decir, generar un shift de Robinson multidimensional. Dicha generalización para el shift de Robinson en este sentido deberá cumplir que sus supertiles de nivel n sean hipercubos de tamaño $2^n - 1$ que se construyan a partir de un arreglo de 2^d -supertiles de nivel $n - 1$ ordenados espacialmente como los puntos extremos de $[0, 1]^d$. Esto puede generalizarse aún más a un shift de Robinson generalizado multidimensional $X_{\text{Rob}}(l_1, \dots, l_d)$, donde ahora cada supertile sea un arreglo espacial de supertiles de un nivel inferior ordenados espacialmente como los elementos de $R[l_1, \dots, l_d]$. Dichas estructuras si bien son sencillas de imaginar o describir en términos generales, resultan complicadas de generar formalmente, dado que al aumentar el número de dimensiones es más complejo describir un alfabeto que permita la construcción de supertiles y simultáneamente evite la aparición de estructuras periódicas.

En el capítulo 4 se demostró que todos los \mathbb{Z}^2 -subshifts límites generados por \mathbb{Z}^2 -sustituciones rectangulares son de tipo sófico, así generalizando la demostración similar reciente de Ollinger [16] al caso de \mathbb{Z}^2 -sustituciones rectangulares. Una posible generalización futura consiste evidentemente en nuevamente extender el resultado al caso de \mathbb{Z}^d -sustituciones para $d > 2$, ya sean cuadradas de tamaño 2 o rectangulares de tamaño arbitrario. Sin embargo una extensión de este tipo utilizando el tipo de argumentos que se presentaron en el capítulo 4 precisa necesariamente de una formulación completa de un shift de Robinson multidimensional como el descrito en el párrafo anterior. Otra posible extensión al resultado es introducir restricciones adicionales al subshift auxiliar Y_s dado por una \mathbb{Z}^2 -sustitución s a modo de que se evite la independencia de los bloques que se encuentran en sectores del espacio separados por líneas infinitas. Si se logra eso, es posible modificar la demostración de modo que la extensión sea de X_s en vez de X_s^l , así se obtiene una prueba alternativa del teorema de Mozes. Si bien lo anterior por si mismo no es tan interesante, en el caso de contar con un shift de Robinson multidimensional, mediante la utilización de una construcción similar que permita

evitar la independencia de sectores del espacio separados por hiperplanos, potencialmente se permitiría generalizar el teorema de Mozes a \mathbb{Z}^d con $d > 2$ usando argumentos similares a los expuestos en el capítulo 4 y sin caer en construcciones complejas como en el paper de Goodman-Strauss [11].

Finalmente, en el capítulo 5 se mostró explícitamente la existencia de \mathbb{Z}^2 -SFT minimales generados por \mathbb{Z}^2 -sustituciones primitivas, tal que no se restringen a una sola órbita finita. Sin embargo se mostró tan solo un caso particular y con un alfabeto bastante largo. Utilizando para $k, l \geq 2$ la estructura de $X_{\text{Rob}}^{\text{dec}}(k, l)$ y detallando de mejor modo donde aparecen las líneas azules en el resto de las baldosas es posible generar por cada par $(k, l) \in \mathbb{N}^2$ con $k, l \geq 2$ una \mathbb{Z}^2 -sustitución rectangular que genere un \mathbb{Z}^2 -SFT minimal no trivial. Se cree que esta familia de \mathbb{Z}^2 -SFT contiene solo \mathbb{Z}^2 -subshifts no conjugados entre sí y así es quizás posible obtener una clase numerable de \mathbb{Z}^2 -SFT que cumplen la propiedad anterior. Lo anterior es importante dado que mostraría que el caso encontrado no es un caso aislado, sino que existe una cantidad al menos numerable de \mathbb{Z}^2 -SFT no conjugados generados por una sustitución primitiva y que no tienen puntos periódicos.

Otro problema que puede resultar interesante desde un punto de vista computacional es encontrar un \mathbb{Z}^2 -SFT minimal no reducido a una órbita finita y generado por una \mathbb{Z}^2 -sustitución primitiva que actúa sobre un alfabeto \mathcal{A} con el tamaño $|\mathcal{A}|$ más pequeño posible. Obviamente, para que dicha pregunta tenga una respuesta no trivial, deben imponerse condiciones extras como que las restricciones sean de tipo nearest neighbor o restringir el problema a baldosas de Wang. El ejemplo entregado en la sección 5 entrega una cota superior para este problema.

Bibliografía

- [1] S. Arora and B. Barak. *Computational Complexity: A Modern Approach*. Cambridge University Press, 2009.
- [2] R. Berger. *The Undecidability of the Domino Problem*. American Mathematical Society, 1966.
- [3] T. Ceccherini-Silberstein and M. Coornaert. *Cellular Automata and Groups*. Springer, 2009.
- [4] I. K. Culik. An aperiodic set of 13 wang tiles. *Discrete Mathematics*, 160(1-3):245–251, 1996.
- [5] M. Denker, C. Grillenberger, and K. Sigmund. *Ergodic theory on compact spaces*. Lecture notes in mathematics. Springer-Verlag, 1976.
- [6] N.P. Fogg and V. Berthé. *Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics*. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 2002.
- [7] N. P. Frank. Multidimensional constant-length substitution sequences. *Topology and its Applications*, 152:44 – 69, 2005. Proceedings of the Dynamical Systems Conference.
- [8] N. P. Frank. A primer of substitution tilings of the euclidean plane. *Expositiones Mathematicae*, 26(4):295 – 326, 2008.
- [9] F. Gähler, A. Julien, and J. Savinien. Combinatorics and topology of the robinson tiling. *Comptes Rendus Mathématique*, 350:627 – 631, 2012.
- [10] E. Glasner. *Ergodic Theory via Joinings*. Mathematical surveys and monographs. American Mathematical Society, 2003.
- [11] C. Goodman-Strauss. Matching rules and substitution tilings. *Annals of Mathematics*, 147(1):pp. 181–223, 1998.
- [12] T. Jolivet and J. Kari. Consistency of multidimensional combinatorial substitutions. *CoRR*, abs/1112.1841, 2011.
- [13] J. Kari. A small aperiodic set of wang tiles. *Discrete Mathematics*, 160:259 – 264, 1996.

- [14] B. Kitchens. *Symbolic Dynamics*. Springer New York, 1998.
- [15] H. von. Koch. Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes plane. *Acta Math*, 30:145–174, 1906.
- [16] B. Le Gloannec and N. Ollinger. Substitutions and strongly deterministic tilesets. In S.Barry Cooper, Anuj Dawar, and Benedikt Löwe, editors, *How the World Computes*, volume 7318 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 462–471. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [17] D.A. Lind and B. Marcus. *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*. Cambridge University Press, 1995.
- [18] S. Mozes. Tilings, substitution systems and dynamical systems generated by them. *Journal d'Analyse Mathématique*, 53(1):139–186, 1989.
- [19] N. Ollinger. Two-by-two substitution systems and the undecidability of the domino problem. In *Proceedings of the 4th conference on Computability in Europe: Logic and Theory of Algorithms*, pages 476–485. Springer-Verlag, 2008.
- [20] R. Pavlov and M. Schraudner. Classification of sofic projective subdynamics of multidimensional shifts of finite type. *To appear in Transactions, AMS*, 2010.
- [21] M. Pollicott and M. Yuri. *Dynamical Systems and Ergodic Theory*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1998.
- [22] C. Radin. *Miles of Tiles*, volume 1. Student Mathematical Library, 1994.
- [23] R. Robinson. Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane. *Inventiones Mathematicae*, 12:177–209, 1971.
- [24] M. Sipser. *Introduction to the Theory of Computation (Ise)*. Thomson Course Technology, 2006.
- [25] P. Walters. *An Introduction to Ergodic Theory*. Graduate texts in mathematics. U.S. Government Printing Office, 2000.
- [26] H. Wang. Proving theorems by pattern recognition i. *Commun. ACM*, 3(4):220–234, April 1960.